Условия задач,
решения и указания к решениям задач

Заключительный тур

XIX Межрегиональной олимпиады

школьников по математике

«САММАТ-2012»

6 - 11 класс

Самара, 2012

XX Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2012»
6 класс

1. В магазин поступили 4 ящика с печеньем, если из каждого ящика вынуть по $13,5$ кг, то во всех ящиках останется столько, сколько было в каждом. Сколько печенья было в каждом ящике?

Ответ: 18 кг.

2. Зайчик прыгает по прямой вперед и назад большими и малыми прыжками. Большой прыжок составляет 90 см, малый - 50 см. Покажите, как ему попасть из пункта A в пункт B, если расстояние между пунктами 2 м 60 см.

Ответ: $90 \cdot 4 - 50 \cdot 2 = 260$.

3. При сложении двух натуральных чисел Незнайка поставил лишний ноль на конце первого слагаемого и вместо 4022 получил сумму, равную 22112. Какие числа складывал Незнайка?

Увказание. Если к записи числа приписать ноль в конце, то оно увеличится в десять раз, т.е. сумма увеличится на девять первых слагаемых. Значит, первое слагаемое равно: $(22112 - 4022) \div 9 = 2010$. Второе слагаемое равно: $4022 - 2010 = 2012$.

Ответ: 2010, 2012.

4. Найти наименьшее трехзначное число n, при котором все дроби

$$\frac{3}{n+2009}, \frac{4}{n+2010}, \frac{5}{n+2011}, \frac{6}{n+2012}$$

несократимы.

Решение. При $n = 100$ сократима первая и четвертая дроби, при $n = 101$ несократимы все дроби.

Ответ: 101.

5. Двое по очереди ломают шоколадку фабрики «Россия» размером 3×6. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом людого из кусков вдоль углубления (но только одного). Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает?

Решение. Решим задачу в общем случае, взяв шоколадку $m \times n$. После каждого хода количество кусков увеличивается на 1. Сначала был один кусок. В конце игры, когда нельзя сделать ходы, шоколадка разломана на маленькие дольки, число кусков равно mn. Значит, игра будет продолжаться $mn - 1$ ход. Поэтому, если $mn - 1$ нечетно, а значит, mn - четно, то выигрывает первый игрок, так как он делает последний ход. Если $mn - 1$ - четно, а значит, mn - нечетно, то выигрывает второй игрок.

Ответ: Выигрывает первый игрок.

6. Найти сумму всех прямоугольников различных размеров (в том числе, и квадратов), состоящих из клеток шахматной доски, если сторона клетки равна 1 см.

Решение. Если длины сторон обозначить a и b, то все такие прямоугольники исчепрпываются следующими:
при $a = 1$ $b = 1, 2, ..., 8$;
при $a = 2$ $b = 2, 3, ..., 8$;
....
при $a = 7$ $b = 7, 8$;
при $a = 8$ $b = 8$.
Искомая сумма равна $1(1 + 2 + ... + 8) + 2(2 + .. + 8) + ... + 8 \cdot 8 = 750$ см ^{2}.

Ответ: 750 см ^{2}.

7. Школьный звонок был сломан. Он начинал звенеть каждый раз, когда на электронных часах появлялась цифра 6, и звенел до тех пор, пока какая-нибудь шестерка была на циферблате часов. Сколько всего времени в течение суток звенел школьный звонок? (Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59.)

Указание. Во первых звонок звенел, когда в числе, обозначающем часы, была цифра шесть. Возможные варианты: 06, 16 часов, всего - 2 часа.

Во-вторых, он звенел, когда число часов не содержало цифры 6, а таких часов 22, и минут было 06, 16, 26, 36, 46, 56. Всего - 132 мин=2 часа 12 минут.

Ответ: 4 часа 12 минут.

8. В оздоровительный лагерь приехали три друга: Миша, Володя, Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из фамилий: Иванов, Семенов, Герасимов. Миша не Герасимов. Отец Володи бизнесмен. Володя учится в 6 классе. Мальчик с фамилией Герасимов учится в 5 классе. Отец мальчика с фамилией Иванов - хирург. Какая фамилия у каждого из друзей?

Ответ: Петя - Герасимов, Володя - Семенов, Миша - Иванов.

9. На прямой выбраны четыре точки A, B, C, D, причем $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Чему может быть равно AD? Укажите все возможные варианты.

Ответ: $7; 5; 3; 1$.

10. Решите ребус КОРОВА+КОРОВА=МОЛОКО. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные.)

Ответ: 302015+302015=604030; 304015+304015=608030.

XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2012»

7 класс

1. Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов вместе, если известно, что 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов стоят вместе 119 руб., а 2 кг лука и 4 кг огурцов стоят 410 руб.

Ответ: 216 р.

2. Найти наибольшее двузначное число n, при котором все дроби

$$\frac{3}{n+2009}, \frac{4}{n+2010}, \frac{5}{n+2011}, \frac{6}{n+2012}$$

несократимы.

Ответ: 96.

3. Имеется 10 ящиков. В некоторых из них лежат 10 ящиков меньшего размера, а в некоторых из меньших ящиков лежат еще по 10 ящиков. Сколько всего ящиков, если заполнено всего 54 ящика?

Решение. Пусть x - число заполненых больших ящиков, y - число заполненых меньших ящиков. По условию $x+y=54$. Число меньших ящиков в 10 раз больше, чем x, а число самых маленьких ящиков в 10 раз больше, чем y. Значит, общее число ящиков равно

$$10+10x+10y=10(1+x+y)=10\cdot 55=550.$$

Ответ: 550.

4. На доске было написано число x с одним знаком после запятой, а под ним в столбик - числа $x+0,1$, $x+0,2$, $x+0,3$ и $x+0,4$. Незнайка стер все знаки после запятых и подсчитал сумму полученных чисел, которая оказалась равной 33. Найдите x.

Решение. Искомое число можно найти подбором, заметив, что $6<x<7$ (ввиду неравенств $5\cdot 6<33<5\cdot 7$.)

Ответ: 6,8.

5. В банке лежат 2012 белых и черных зерен, из них 1000 белые. Наугад достаем два зерна. Если зерна одного цвета, то мы их выбрасываем, а в банку добавляем черное зерно, если зерна разного цвета, то черное выбрасываем, а белое кладем обратно. В конце концов осталось одно зерно. Какого оно цвета?

Решение. Легко видеть, что число белых зерен каждый раз либо не меняется, либо уменьшается на 2, т.е. не меняет четности. Если исходное число белых зерен было нечетным, то в конце концов оставшееся единственное зерно должно быть белым, если же это число четно, то оставшееся зерно черное.

Ответ: Черное зерно.

6. Школьный звонок был сломан. Он начинал звенеть каждый раз, когда на электронных часах появлялась цифра 5, и звенел до тех пор, пока какая-нибудь пятерка была на циферблате часов. Сколько всего времени в течение суток звенел школьный звонок? (Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59.)

Указание. Во первых звонок звенел, когда в числе, обозначающем часы, была цифра шесть. Возможные варианты: 05, 15 часов, всего - 2 часа.

Во-вторых, он звенел, когда число часов не содержало цифры 5, а таких часов 22, и минут было 05, 15, 25, 35, 45, с 50 до 59. Всего - 330 мин=5 часов 30 минут.

Ответ: 7 часов 30 минут.

7. Веселый молочник имеет 12 л молока и хочет подарить из него половину, но у него нет кувшина в 6 литров . У него два кувшина, один 8-и литровый, другой 5-и литровый. Спрашивается, каким образом налить 6 л в 8-и литровый кувшин.

Решение.

Первое решение.

12	8	5
Переливания		
12	0	0
4	8	0
4	3	5
9	3	0
9	0	3
1	8	3
1	6	5
6	6	0

Второе решение.

12	8	5
Переливания		
12	0	0
7	0	5
0	7	5
0	8	4
8	0	4
8	4	0
3	4	5
3	8	1
11	0	1
11	1	0
6	1	5
6	6	0

8. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK и $\angle AKB : \angle CKB = 4 : 5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC.

Ответ: 20^0.

9. Лиса Алиса и кот Базилио делят 10 золотых монет по следующему правилу. Сначала Базилио делит все золотые на две кучки, в каждой не менее двух золотых. Потом Алиса делит каждую из этих кучек еще на две кучки. Из полученных четырех кучек наибольшая и наименьшая достаются Алисе, а две средние - Базилио. Кому сколько достанется?

Решение. Пусть Базилио разделит монеты на две кучки, состоящие из a и b монет, причем $a \leq b$. Алиса может разделить первую кучку примерно поровну, а вторую кучку - на кучки состоящие из 1 и $1 - b$ монет. Этим самым Лиса Алиса обеспечит себе b золотых. Поскольку $b \geq a$ и $a + b = 10$, то $b \geq 5$. Поэтому Алисе достанется не менее 5 монет.

Предположим, что Базилио разделил монеты на две равные кучки. Тогда, как бы ни делила монеты Алиса, ей достанется 5 золотых. Итак каждому достанется по 5 монет.

10. Расшифровать пример на деление

$$\text{ЗАКОН:Н=УКАЗ.}$$

Одним и тем же буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные.

Ответ: 12063:3=4021; 12084:4=3021; 14082:2=7041; 15902:2=7951, 17942:2=8971, 19473:3=6491.

XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2012»

8 класс

1. Купец, будучи должен 753 руб., попросил у того же заимодавца еще 303 руб. Последний согласился удовлетворить его просьбу на условии, чтобы весь долг был уплачен в течение 8 месяцев и притом так, чтобы должник, внеся к концу первого месяца некоторую сумму на покрытие части долга, ежемесячно увеличивал свой взнос на половину, т.е. уплатил бы во второй месяц полторы суммы таких суммы, в третий месяц две таких же суммы, в четвертый две с половиной и т.д. Обсудив эти условия, купец согласился на них. Спрашивается, какую сумму должен он внести в первый месяц и сколько в каждый из следующих месяцев.

Решение. Пусть к концу первого месяца купец должен внести x руб. Тогда

$$\left(1+1\frac{1}{2}+2+2\frac{1}{2}+3+3\frac{1}{2}+4+4\frac{1}{2}\right)x=753+303;$$

$$x=48.$$

Ответ: 48; 72; 96; 120; 144; 168; 192; 216.

2. Имеется 199 литров молока в бутылках по 0,5, 0,7 и 1 литру. Доказать, что можно взять 50 литров молока, не вскрывая бутылок.

Доказательство. Если в бутылках по 0,5 л и 1 л имеется не менее 50 л молока, то справедливость утверждения очевидна.

Допустим теперь, что полулитровыми и литровыми бутылками набрать 50 л нельзя. Тогда в бутылках по 0,7 л находится больше 149 л молока, беря только такие бутылки, получить 50 л нельзя (50:0,7 - нецелое), но 49 л можно (70 бутылок). А поскольку 198,5 л или все 199 л не могут размещаться в бутылках по 0,7 л, то обязательно найдутся бутылки другой емкости. одна или две из которых дадут недостающий 1 литр.

Следовательно, в любом случае можно взять 50 л молока, не вскрывая бутылки.

3. Построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику.

Указание. Пусть a, b — стороны прямоугольника, тогда сторона квадрата $x = sqrta \cdot b$, т.е. необходимо построить среднее геометрическое.

4. Три тюльпана и девять гвоздик стоят меньше 220 рублей, а семь тюльпанов и пять гвоздик - больше 24о рублей. Что дороже: 41 тюльпан или 53 гвоздики?

Решение. Пусть x стоимость тюльпана, y - гвоздики (в рублях). Тогда по условию $\begin{cases} 3x+9y<220, \\ 7x+5y>240, \end{cases}$

Умножим обе части первого неравенства на 12, второго - на 11: $\begin{cases} 36x+108y<2640, \\ 22x+11y>2640, \end{cases}$ отсюда $77x+55y>36x+108y$, или $41x>53y$.

Ответ: 41 тюльпан дороже 53 гвоздик.

5. Школьный звонок был сломан. Он начинал звенеть каждый раз, когда на электронных часах появлялась цифра 2, и звенел до тех пор, пока какая-нибудь двойка была на циферблате часов. Сколько всего времени в течение суток звенел школьный звонок? (Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59.)

Указание. Во первых звонок звенел, когда в числе, обозначающем часы, была цифра два. Возможные варианты: 02, 12, 20, 21, 22, 23 часов, всего - 6 часов.

Во-вторых, он звенел, когда число часов не содержало цифры 2, а таких часов 18, и минут было 02, 12, с 20 до 29, 32, 42, 52. Всего - 270 мин=4 часа 30 минут.

Ответ: 10 часов 30 минут.

6. Двое по очереди ломают шоколадку фабрики «Россия» размером $m \times n$. За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления (но только одного). Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает?

Решение. Решим задачу в общем случае, взяв шоколадку $m \times n$. После каждого хода количество кусков увеличивается на 1. Сначала был один кусок. В конце игры, когда нельзя сделать ходы, шоколадка разломана на маленькие дольки, число кусков равно mn. Значит, игра будет продолжаться $mn-1$ ход. Поэтому, если $mn-1$ нечетно, а значит, mn - четно, то выигрывает первый игрок, так как он делает последний ход. Если $mn-1$ - четно, а значит, mn - нечетно, то выигрывает второй игрок.

Ответ: если mn - четно, то выигрывает первый игрок, если mn - нечетно, то выигрывает второй игрок.

7. Вычислить:

$$\sqrt{1+2012^2+\frac{2012^2}{2013^2}}+\frac{2012}{2013}.$$

Решение. Воспользуемся формулой $\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}+\frac{a^2}{(ab+1)^2}}=|a+\frac{1}{b}-\frac{a}{ab+1}|$.

$$\sqrt{1+2012^2+\frac{2012^2}{2013^2}}+\frac{2012}{2013}=\sqrt{\frac{1}{1^2}+2012^2+\frac{2012^2}{(2012\cdot 1+1)^2}}+\frac{2012}{2013}=$$

$$|2012+1-\frac{2012}{2013}|+\frac{2012}{2013}=2013.$$

Ответ: 2013.

8. Найти все пятизначные числа $\overline{abcde}$, делящиеся на 36 и такие, что $a<b<c<d<e$.

Решение. Так как $36=4\cdot 9$, то каждое искомое число делится на 4 и на 9. По признаку делимости на 4 двузначное число $\overline{de}$ кратно 4, а ввиду очевидных неравенств $4\le d<e\le 8$ оно может быть равно только 48, 56 или 68. Разберем эти три случая.

Если $\overline{de}=48$, то $\overline{abc}=123$, а число 12348 удовлетворяет условиям задачи.

Если $\overline{de}=56$, то по признаку делимости на 9 и с учетом неравенств $a<b<c\le 4$ имеем $\overline{abcde}=12456$, а число 12456 удовлетворяет условиям задачи.

Наконец, равенство $\overline{de}=68$ для искомого числа $\overline{abcde}$ выполняться не может, так как соотношения $18<1+2+3+6+8\le a+b+c+d+e\le 3+4+5+6+8<27$ показывают, что сумма $a+b+c+d+e$ не может быть кратна 9.

Ответ: 12348, 12456.

9. Турист выехал из турбазы на байдарке против течения в 10 часов 15 минут с обязательством вернуться обратно не позднее 13 часов того же дня. Известно, что скорость течения 1,4 км/ч, скорость байдарки в стоячей воде 3 км/ч. На какое максимальное расстояние турист может отплыть от турбазы, если через каждые 30 мин гребли он 15 мин отдыхает, не причаливая к берегу, и может повернуть назад только после отдыха.

Решение. За один цикл "гребля - отдых"по течению турист проплывает 2,55 км, а против течения - 0,45 км, и тратит на этот цикл 0,75 ч.

Пусть до поворота назад турист совершает n циклов, тогда на обратный путь ему понадобится $\frac{0{,}45n}{4{,}4}$ ч, и для того чтобы он не опоздал, должно выполняться неравенство

$$0,75n+\frac{0,45n}{4,4}\le 2,75,$$

откуда $n\le 3$. Поэтому наибольшее удаление от турбазы получается перед отдыхом во время третьего цикла и равно $0,9+0,8=1,7$.

Ответ: 1,7 км.

10. Зная, что $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{m}{n}$, найти $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}$.

Решение. Положим $a+b=x$, $b+c=y$, $c+a=z$. Тогда $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz}$, а так как при этом $a=\frac{1}{2}(x-y+z)$, $b=\frac{1}{2}(y-z+x)$, $c=\frac{1}{2}(z-x+y)$, то

$$\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}=\frac{x-y+z}{2x}+\frac{y-z+x}{2y}+\frac{z-x+y}{2z}=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{y-z}{2x}+\frac{1}{2}-\frac{z-x}{2y}+\frac{1}{2}-\frac{x-y}{2z}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)=$$

$$\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(y-z)yz+(z-x)zx+(x-y)xy}{xyz}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{m}{n}=\frac{3n-m}{2n}.$$

Ответ: $\frac{3n-m}{2n}$.

XX Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2012»

9 класс

1. В железнодорожной будке на расстоянии 1 м от окна, ширина которого 1 м, сидит обходчик. На расстоянии 299 м от окна и параллельно плоскости окна проходит железнодорожный путь. Обходчик видит целиком поезд длиной 100 м, идущий по этому пути с постоянной скоростью в течение 10 сек. Определить скорость поезда. (Шириной поезда и расстоянием между глазами обходчика можно пренебречь.)

Решение. Пусть S - точка, в которой находится обходчик, AB - окно, CD - видимый участок железнодорожного пути и $SE \perp CD$. По условию $SF = 1$, $AB = 1$, $FE = 299$, тогда $SE = 300$ и подобия треугольников ABS и CDS получим $CD = 300$. Пусть поезд движется от C к D, обходчик видит поезд целиком с момента, когда конец последнего вагона попал в точку C, до момента, когда начало первого вагона попало в точку D. Следовательно, поезд прошел $300 - 100 = 200$ м за 10 сек, поэтому его скорость равна 20 м/сек. (72 км/ч.)

Ответ: 72 км/ч.

2. Имеются два равновеликих, не являющихся квадратами прямоугольника, у которых стороны измеряются целыми числами. У первого прямоугольника ширина равна 2011, а длина равна полупериметру второго прямоугольника. Найдите ширину (меньшую сторону) второго прямоугольника.

Ответ: 2012.

3. Последовательность a_n задана соотношением $a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n}$. Найдите a_{2012}, если $a_1 = 3 + \sqrt{7}$.

Решение. Из условия следует, что $a_2 = \frac{1}{1-(3+\sqrt{7})} = \frac{2-\sqrt{7}}{3}$,

$a_3 = \frac{1}{1-\frac{2-\sqrt{7}}{3}} = \frac{\sqrt{7}-1}{2}$,

$a_4 = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{7}-1}{2}} = 3 + \sqrt{7} = a_1$.

Тогда $a_{n+3} = a_n$ при любом $n \in N$. Следовательно, $a_{2012} = a_2 = \dfrac{2-\sqrt{7}}{3}$.

4. Дворянинов С.В. Ученик нарисовал треугольник с углами x, y, z, другой ученик нарисовал треугольник с углами $sqrtxy$, $\sqrt{yz}$, $\sqrt{zx}$ градусов. Найдите x, y, z.

Решение. По условию задачи $x + y + z = \pi$, $sqrtxy + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = \pi$. Получаем, что $x + y + z - sqrtxy - \sqrt{yz} - \sqrt{zx} = 0$.

Последнее уравнение равносильно уравнению

$$(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 + (\sqrt{z} - \sqrt{x})^2 = 0.$$

Получаем, что $x = y = z = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: $x = y = z = \frac{\pi}{3}$.

5. Дан произвольный треугольник. Построить с помощью циркуля и линейки квадрат равновеликий данному треугольнику.

Решение. 1 способ. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \Rightarrow x = \sqrt{S}$, $x = \sqrt{\sqrt{p(p-c)}\sqrt{(p-b)(p-c)}}$.

$m = \sqrt{p(p-c)}$, $n = \sqrt{(p-b)(p-c)}$ – среднее геометрическое. Строится среднее геометрическое.

2 способ. С помощью циркуля и линейки строится высота треугольника (описать). Тогда площадь треугольника $S = \frac{1}{2}bh$ и $x = \sqrt{\frac{1}{2}bh}$– среднее геометрическое величин $\frac{b}{2}$, h.

6. В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Найти число учеников, если известно, что возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе.

Решение. Пусть n - число учеников, s - их средний возраст. Тогда $s + 24$ - возраст учителя, $ns + s + 24$ - сумма возрастов присутствующих в классе. Отсюда

$$\frac{ns + s + 24}{n+1} = s + \frac{24}{n+1}$$

- средний возраст всех присутствующих в классе, с другой стороны, равен $s + 24 - 20 = s + 4$. Равенство $s + \frac{24}{n+1} = s + 4$ дает нам $n = 5$. Следовательно, в классе присутствуют 5 учеников.

Ответ: 5.

7. 2012 чисел: $x_1, x_2, ..., x_{2012}$ записаны в строчку. Известно, что сумма любых трех соседних из них равна 200. Причем первое число 19, а последнее - 98. Найтиде остальные 2009 чисел.

Решение. Для любого n выполнено $x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}$. Отсюда следует, что $x_n = x_{n+3}$, и, аналогично, $x_{n+1} = x_{x+4}$, $x_{n+2} = x_{n+5}$, т.е.идет периодическое повторение первых трех чисел x_1, x_2, x_3. Тогда $x_{3k+1} = x_1 = 19$, $x_{3k+2} = x_{2012} = 98$ $(k = 0, 1, ..., 670)$ и $x_{3k} = 200 - 19 - 98 = 83$ $(k = 1, 2, ..., 670)$.

8. Найти наибольшее значение величины $\frac{x}{3+y^2} + \frac{y}{3+x^2}$ при $0 \le x, y \le 1$.

Решение. Т.к. $0 \le x, y \le 1$, то $\frac{x}{3+y^2} \le \frac{x}{2+x^2+y^2}$, $\frac{y}{3+x^2} \le \frac{y}{2+x^2+y^2}$, следовательно, $\frac{x}{3+y^2} + \frac{y}{3+x^2} \le \frac{x+y}{2+x^2+y^2}$.

Докажем, что $\frac{x+y}{2+x^2+y^2} \le \frac{1}{2}$.

Это следует из того, что

$$2(x+y) \leq 2 + x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geq 0,$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0, \forall x, y.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$ при $x = y = 1$.

9. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. Угол $BAC = 120^0$. Угол ABC больше угла ACB. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2. Найдите медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B.

Решение. Пусть O - центр окружности, K, M, N - точки касания со сторонами AC, BC, AB. Тогда $OK = r = AO * \sin 60^0 = \sqrt{3}$, $AK = AN = 1$. Если p-полупериметр треугольника ABC, то $S_{ABC} = pr$. Отсюда находим, что $p = 15$.

Обозначим $BM = BN = x$, $CM = CK = y$. Тогда

$$\begin{cases} x + y + 1 = 15, \\ (x+y)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2 + (x+1)(y+1). \end{cases}$$

Решив полученную систему получаем: $x = 9, y = 5$ или $x = 5, y = 9$.

Используя условие, что Угол ABC больше угла ACB получаем, что решение $x = 9, y = 5$ не удовлетворяет условию задачи.

Тогда воспользовавшись теоремой косинусов, получаем, что медиана проведенная из вершины B равна: 11.

Ответ: 11.

10. Зная, что $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{m}{n}$, найти $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$.

Решение. Положим $a + b = x$, $b + c = y$, $c + a = z$. Тогда $\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz}$, а так как при этом $a = \frac{1}{2}(x - y + z)$, $b = \frac{1}{2}(y - z + x)$, $c = \frac{1}{2}(z - x + y)$, то

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} = \frac{x-y+z}{2x} + \frac{y-z+x}{2y} + \frac{z-x+y}{2z} =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{y-z}{2x} + \frac{1}{2} - \frac{z-x}{2y} + \frac{1}{2} - \frac{x-y}{2z} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{y-z}{x} + \frac{z-x}{y} + \frac{x-y}{z}\right) =$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(y-z)yz + (z-x)zx + (x-y)xy}{xyz} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(z-y)(x-z)(y-x)}{xyz} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} = \frac{3n-m}{2n}.$$

Ответ: $\frac{3n-m}{2n}$.

XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2012»

10 класс

1. В коробке находятся 13 красных и 17 белых шаров. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции:

1) увеличить на 2 число красных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;

2) увеличить на 1 число красных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых;

3) уменьшить на 2 число красных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых;

4) уменьшить на 1 число красных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых. Можно ли, совершая такие действия, добиться, чтобы в ящике было 1993 красных шара и 2012 белых шара?

Решение. Каждая из указанных операций представляет собой прибавление положительных и отрицательных чисел к уже имеющимся двум числам. Следовательно, эти операции перестановочны, т.е. если мы изменим порядок их выполнения, на резльтат это не овлияет.

Предположим, что после применения p операций типа 1), q операций типа 2), r операций типа 3), s типа 4) мы получили 1993 красных шара 2012 белых шара. Тогда

$$\begin{cases} 13+2p+q-2r-s=1993, \\ 17-p+2q+r-2s=2012, \end{cases} \begin{cases} 2(p-r)+(q-s)=1980, \\ -(p-r)+2(q-s)=1995, \end{cases} \begin{cases} p-r=399, \\ q-s=\frac{5970}{5}=1194. \end{cases}$$

Ответ: Возможно.

2. Дворянинов С.В. Ученик нарисовал треугольник с углами α, β, γ, другой ученик нарисовал треугольник с углами $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$, $\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ градусов. Найдите α, β, γ.

Решение. По условию задачи $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}=\pi$. Получаем, что

$$\alpha+\beta+\gamma-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}-\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}-\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}=0,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta+\gamma}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\alpha+\gamma}\right)=0.$$

Тогда второй не может построить такой треугольник.

3. Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK, причем точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что $BK=\frac{|AK-CK|}{\sqrt{2}}$ и $DK=\frac{AK+CK}{\sqrt{2}}$.

Решение. Пусть $CK<AK$. Обозначим $\angle ACK=\varphi$. Тогда $\varphi<45^0$. Точка K лежит на окружности, описанной около данного квадрата. Если R - радиус этой окружности, то $BK=2Rsin\angle BCK=ACsin(\varphi-45^0)=AC(\frac{\sqrt{2}}{2}sin\varphi-\frac{\sqrt{2}}{2}cos\varphi)=\frac{ACsin\varphi-ACcos\varphi}{\sqrt{2}}=\frac{AK-CK}{\sqrt{2}}$.

$DK=2Rsin\angle KCD=ACsin(45^0+\varphi)=\frac{ACcos\varphi+ACsin\varphi}{\sqrt{2}}=\frac{CK+AK}{\sqrt{2}}$.

4. Может ли среднее арифметическое 25 различных целых чисел равняться: а) 25,24; б) 25,25.

Решение. а) Может.

Пример. $\frac{S}{25}=25\frac{24}{100}=\frac{631}{25}$. $S=631$.

$1,2,3,...,24,331$. $S=\frac{1+24}{2}\cdot 24+331=25\cdot 12+331=631$. $S=\frac{631}{25}=25,24$.

б) Не может.

5. Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\ldots}}}=2012$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$|x|^{\frac{2}{3}}\cdot|x|^{\frac{2}{3^2}}\cdot|x|^{\frac{2}{3^3}}\cdot ...=2012, \quad |x|^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots}=2012.$$

Поскольку сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^3}+...$ равна 1, то $|x|=2012$.

Ответ: 2012, -2012.

6. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 108^0. Доказать, что высота треугольника, проведенная к основанию, составляет половину биссектрисы угла при основании.

Решение. Пусть $\angle ACB=108$, $BH\perp AB$, $\angle A=\angle B=36$, AK — биссектриса. Введем обозначение $AB=2a$. Рассмотрим $\triangle ACH$, $CH=a\cdot tg36^0$. Рассмотри $\triangle AKB$, $AK=2atg36^0$. Следовательно, $2CH=AK$.

7. Число, кратное 35, в системе счисления с двузначным основанием записано в виде 1234. Найдите это число.

Решение. Пусть основанием системы счисления служит число $10x+y$. Тогда будем иметь: $(10x+y)^3+2(10x+y)^2+3(10x+y)+4=35N$, где N – частное от деления искомого числа на 35. Отсюда вытекает, что число y^3+2y^2+3y+4 должно делиться на 5. Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это возможно только при $y=1$ и $y=6$.

Пусть $y = 1$, тогда $1000x^3 + 500x^2 + 100x + 10 = 35N$ или $200x^3 + 100x^2 + 20x + 2 = 7N$. Перепишем это равенство так:

$$7(28x^3 + 14x^2 + 3x) + (4x^3 + 2x^2 - x + 2) = 7N.$$

Число $4x^3 + 2x^2 - x + 2$ делится на 7 только при $x = 1$ и $x = 8$.

Подобным образом убеждаемся, что при $y = 6$ значением x может быть только число 4.

Итак, условию задачи удовлетворяют числа:

$$11^3 + 2 \cdot 11^2 + 3 \cdot 11 + 4 = 1610;$$

$$46^3 + 2 \cdot 46^2 + 3 \cdot 46 + 4 = 101710;$$

$$81^3 + 2 \cdot 81^2 + 3 \cdot 81 + 4 = 544810.$$

Ответ: 1610; 101710; 544810.

8. Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{5+y^3} + \dfrac{y}{5+x^3}$ при $0 \leq x, y \leq 1$.

Решение. Воспользуемся фактом, что при $0 \leq x, y \leq 1$. $x^3 - 3x + 2 \geq 0$, тогда $x^3 - 3x + 2 + y^3 - 3y + 2 \geq 0$, $3(x+y) \leq 4 + x^3 + y^3$.

Значит $\dfrac{x}{5+y^3} + \dfrac{y}{5+x^3} \leq \dfrac{x}{4+x^3+y^3} + \dfrac{y}{4+x^3+y^3} = \dfrac{x+y}{4+x^3+y^3} \leq \frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{1}{3}$.

9. Дана произвольная трапеция. С помощью циркуля и линейки найдите координаты центра тяжести данной трапеции.

Решение. Рассмотрим произвольную трапецию $ABCD$. Проведем диагональ BD. Известно, что центр тяжести треугольника лежит в точке пересечения его медиан. Следовательно, необходимо построить точки F, E - точки пересечения медиан треугольников ABD и BSD соответственно. Соединяя точки F и E отрезком и находя его середину, находим центр тяжести произволной трапеции.

10. Жук ползет вверх по поверхности, вертикальное сечение, которой имеет форму параболы $y = \frac{1}{2}x^2$. За единицу времени жук поднимается на 8 см. Потом он отдыхает столько же времени и вследствие скольжения за время отдыха опускается на расстояние, численно равное крутизне (тангенсу угла наклона) параболы в момент начала отдыха. Определите координаты жука в конце девятой единицы времени от начала движения.

Решение. К концу 1-ой единицы времени $H = y = 8$, $tg\alpha = y' = x$. из уравнения $y = \frac{1}{2}x^2$ имеем: $x = \sqrt{2y}$. Значит, к концу 2-ой единицы времени жук опустится на $\sqrt{16} = 4$. Его высота будет: $8 - 4 = 4$ см. За третью единицу времени он поднимется на 8 см. $H = y = 12$. За 4-ую единицу времени поднимется на $\sqrt{2y} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$. За 5-ю единицу времени поднимется на 8 см до $y = H = (20 - 2\sqrt{6})$ см. За 6-ую единицу опуститься на $\sqrt{2y} = 2\sqrt{10 - \sqrt{6}}$ см. Его высота будет равна: $(20 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}})$ см. За 7-ую единицу времени поднимется до высоты $y = H = (28 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}})$ см. За 8-ую единицу времени опуститься на $\sqrt{2y} = 2\sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}}$ см. Его высота будет: $y = (28 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}} - 2\sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}})$ см. В конце 9-ой единицы времени $y = (36 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{10 - \sqrt{6}} - 2\sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}})$ см, а

$$x = \sqrt{2y} = 2\sqrt{18 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}} - \sqrt{14 - \sqrt{6} - \sqrt{10 - \sqrt{6}}}}.$$

XX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2012»

11 класс

$\triangleright$ **1. Дворянинов С.В.** Ученик нарисовал треугольник с углами $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt{\beta\gamma}$, $\sqrt{\alpha\gamma}$, другой ученик нарисовал треугольник с углами $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $\dfrac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}$, $\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ градусов. Найдите α, β, γ.

Ответ: $\alpha=\beta=\gamma=\frac{\pi}{3}$.

$\triangleright$ **2.** Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{m}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}=\frac{1}{n}, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{k}. \end{cases}$

Решение. Исходную систему можно записать:
$\begin{cases} m(x+y+z)=xy+xz, \\ n(x+y+z)=xy+yz, \\ k(x+y+z)=xz+yz. \end{cases}$

Поделим (1) уравнение на (2) и (1) уравнение на (3), получим: $\begin{cases} \frac{xy+xz}{xy+yz}=\frac{m}{n}, \\ \frac{xy+xz}{xz+yz}=\frac{m}{k}, \end{cases}$

$\begin{cases} n(xy+xz)=m(xy+yz), \\ k(xy+xz)=m(xz+yz), \end{cases}$ $\begin{cases} (n-m)xy+nxz=myz, \\ kxy+(k-m)xz=myz, \end{cases}$

Тогда $x=\frac{n+m-k}{k+n-m}z$, $y=\frac{k-m-n}{n-m-k}z$, подставляя x, y в одно из уравнений получаем, что

$$z=\frac{k^2+m^2+n^2-2kn-2km-2mn}{2(k-n-m)}.$$

$$y=\frac{k^2+m^2+n^2-2kn-2km-2mn}{2(n-m-k)},$$

$$z=\frac{k^2+m^2+n^2-2kn-2km-2mn}{2(m-n-k)}.$$

$\triangleright$ **3.** Найдите все целые решения неравенства

$$2(x^2+x)\sin 2x+(2x+2-x^3)\cos 2x \le x^3+2x+2.$$

Решение. Воспользуемся формулой

$$a\sin x+b\cos x=C\sin(x+t),$$

где $C=\sqrt{a^2+b^2}, \quad t=arcsin\frac{b}{c}$.

Исходное неравенство можно записать

$$\sin(2x+t)\le\frac{x^3+2x+2}{\sqrt{(2x^2+2x)^2+(2x+2-x^3)^2}}.$$

Тогда возможны три случая:

1. $\frac{x^3+2x+2}{\sqrt{(2x^2+2x)^2+(2x+2-x^3)^2}}<-1$, следовательно, $x^3+2x+2<0$. Решая это неравенство получаем, что при $x<-1$ решений неравенство не имеет.

2. $|\frac{x^3+2x+2}{\sqrt{(2x^2+2x)^2+(2x+2-x^3)^2}}|\le 1$. Данное неравенство может иметь три целочисленных решения: -1; 0; 1. Непосредственной проверкой убеждаемся, что при $x=0$, $x=1$ исходное неравенство верно.

3. $\frac{x^3+2x+2}{\sqrt{(2x^2+2x)^2+(2x+2-x^3)^2}}>1, x^3+2x+2>0$. Данные условия выполнены при $x>1$.

Ответ: $N\cup 0$.

$\triangleright$ **4.** Пусть x,y,z - корни уравнения $t^3-3t^2-2010t+2012=0$. Чему равно выражение $A=||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z$.

Решение. Заметим, что $A=4\max\{x,y,z\}$. Корнями уравнения $t^3-3t^2-2010t+2012=0$ являются числа $1, 1+\sqrt{2013}, 1-\sqrt{2013}$. Тогда получаем, что $A=4(1+\sqrt{2013})$.

$\triangleright$ **5.** Паук ползет поочередно по внешней и внутреней частям цилиндрической поверхности. Пусть M - точка из которой Паук начинает свое движение (см.обратную сторону, рис.1), R - радиус основания цилиндра, h - высота цилиндрра. Найти наименьшее расстояние, которое должен проползти Паук чтобы вернуться в точку M, если известно что на нижнем основании он побывал 2012 раз.

Указание. Рассмотреть развертку цилиндра.

Ответ: $d=\sqrt{4\pi^2r^2+(4024h)^2}$.

$\triangleright$ **6. Дворянинов С.В.** На плоскасти дано множество отрезков LR, где $L(-\frac{1}{\sqrt{p}}; \frac{1}{p})$, $R(\sqrt{p}; p)$ и параметр $p \in [0,25; 4]$. Найдите площадь наименьшей фигуры, содержащей внутри себя все эти отрезки.

Решение. Легко заметить, что все точки L и R лежат на параболе $y = x^2$. Рассмотрев несколько отрезков (например, $p = 0,25; 1; 4$), можно предположить, что все эти отрезки пересекаются в одной точке на оси OY. Для доказательства этого рассмотрим уравнение прямой, проходящей через точки L и R :

$$y = \frac{p-1}{\sqrt{p}}(x - \sqrt{p}) + p. \qquad (1)$$

При любом значении параметра и при $x = 0$ получаем $y = 1$. Это означает, что все отрезки проходят через точку $(0; 1)$. При изменении параметра эти отрезки поварачиваются вокруг этой точки, меняя свою длину. Эти отрезки заметают два равных криволинейных треугольника. Правый треугольник ограничен параболой $y = x^2$ и двумя прямыми линиями, получаемыми из уравнения (1) при $p = 0,25$ и $p = 4$. Это соответственно прямые линии

$$y = -\frac{3}{2}x + 1, y = \frac{3}{2}x + 1.$$

Первая прямая пересекает параболу (для правого треугольника) в точке $R(0,5; 0,25)$, вторая - в точке $R(2; 4)$.

Площадь правого треугольника выражается суммой двух интегралов

$$\int_0^{0,5} \left(\left(\frac{3}{2}x + 1\right) - \left(-\frac{3}{2}x + 1\right)\right) dx + \int_{0,5}^{2} \left(\left(\frac{3}{2}x + 1\right) - x^2\right) dx = 2\frac{1}{16}.$$

Ответ: $4\frac{1}{8}$.

$\triangleright$ **7.** Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{4023 + y^{2011}} + \dfrac{y}{4023 + x^{2011}}$ при $x, y \in [0; 1]$.

Решение. Воспользуемся неравенством $x^{2011} - 2012x + 2012 \geq 0$ при $x, y \in [0; 1]$. Тогда $x^{2011} - 2012x + 2011 + y^{2011} - 2012y + 2011 \geq 0$, $2012(x + y) \leq 4022 + x^{2011} + y^{2011}$.

Значит, $\dfrac{x}{4023 + y^{2011}} + \dfrac{y}{4023 + x^{2011}} \leq \dfrac{x}{4022 + x^{2011} + y^{2011}} + \dfrac{y}{4022 + x^{2011} + y^{2011}} =$

$= \dfrac{x + y}{4022 + x^{2011} + y^{2011}} \leq \dfrac{1}{2012}$.

Ответ: $\frac{1}{2012}$.

$\triangleright$ **8.** В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a, b. Эта призма рассечена плоскостью так, что в сечении получился равносторонний треугольник. Определить сторону этого треугольника.

Указани к решению. Рассмотрим трехмерную систему координат и точки с координатами $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, 0, z)$. Пусть вершины равностороннего треугольника заданы точками $(0, 0, 0)$, $(a, 0, v)$, $(0, b, u)$. По условию задачи получем, что $a^2 + v^2 = b^2 + u^2 = a^2 + b^2 + (v - u)^2$.

Рассммотрим систему

$$\begin{cases} u^2 - v^2 = a^2 - b^2, \\ u^2 - (v - u)^2 = a^2. \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе и введем замену $t = \frac{u}{v}$, получим уравнение вида

$$t^2 - 2\frac{a^2 - b^2}{a^2}t - \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

Решая это квадратное уравнение находим t, подставляя его в одно из уравнений системы получаем уравнение относительно v.

$\triangleright$ **9.** С помощью циркуля и линейки по заданному периметру и углу α построить треугольник равновеликий данному квадрату.

$\triangleright$ **10.** Куб без полостей составлен из трех равновеликих частей. Четыре боковые грани куба имеют вид (см. обратная сторона, рис.2). Видимая часть боковой грани среднего тела – невыпуклый шестиугольник. Найдите все возможные значения радиуса цилиндрического отверстия, перпендикулярного верхней и нижней граням куба, не задевающего среднего тела. Известно, что $AB = a$, $PP_1 = QQ_1 = \frac{3}{8}a$, $NN_1 = \frac{4}{7}a$.

Решение. Объем одной части $V = \dfrac{a^3}{3}$, тогда высота частей равна $H = a$, а площадь $S = \dfrac{a^2}{3}$.

Пусть $NM = x$, тогда площадь трапеции $NMPQ$,

$$(x + \frac{a}{4}) \cdot \frac{2}{7}a = \frac{a^2}{6}, \Rightarrow x = \frac{a}{3}.$$

Основание данного цилиндра будет вписано в квадрат со стороной $\frac{\sqrt{2}a}{3}$, следовательно, радиус основания $\frac{\sqrt{2}a}{6}$.

Ответ: $R \in (0; \frac{\sqrt{2}a}{6}))$.