

**ХІХ Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2011»
6 класс
Заключительный тур**

► 1. *Дворянинов С.В.* Двигаясь из Простоквашино в город с постоянной скоростью дядя Федор на первые 20 км пути затратил столько минут, сколько километров он проехал за 1 час 20 минут. Найти длину всего пути.

► 2. После того, как в двузначном числе зачеркнули одну цифру, оно уменьшилось в 31 раз. Какое это число и какую цифру зачеркнули?

► 3. Корова вчетверо дороже собаки, а лошадь вчетверо дороже коровы. Собака, две коровы и лошадь стоят 200 р. Сколько стоит корова?

► 4. У папы Карло есть 130 дощечек. Из 5 дощечек он может сделать игрушечную мельницу, из 7 дощечек - пароход, из 14 дощечек - самолет. Самолет стоит 19 золотых, пароход - 8 золотых, мельница - 6 золотых. Какое наибольшее количество золотых может заработать папа Карло?

► 5. Пираты имеют бочки с порохом весом в 1, 2, 3, 4, ..., 19, 20 пудов. Смогут ли пираты разложить бочки в три шхуны поровну (по весу).

► 6. *Гусев А.А.* В жаркое лето 2010 года в Рязанской области в Сасовском районе 18 деревень оказались в зоне лесных пожаров. Количество домов в деревнях было поровну. Но подул ветер и в некоторых деревнях загорелись дома; в каких-то сгорела ровно половина домов, в каких-то - ровно треть, а в остальных ничего не сгорело. Отстояли жители свои деревни. При этом во всех деревнях вместе сгорела ровно одна девятая часть всех домов. В скольких деревнях жители спасли от пожара все дома?

► 7. *Гусев А.А.* Саша купил тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы числами от 1 до 192 по порядку. Боря выбрал из этих листов 25 (не обязательно по порядку) и сложил 50 написанных на них чисел. У него получилось 2010. Докажите, что он ошибся. А могло ли у него получиться 2013?

► 8. Из всех двузначных чисел составили сплошную цепочку:

10111213141516...96979899,

и в полученном числе цифры 2, 3, 4, 7, 8 покрасили золотой краской, а остальные цифры - серебряной. Какой краски понадобилось больше, если на каждую цифру тратится одно и то же количество краски?

► 9. *Савин А.Н.* Поезд Москва-Омск отправляется из Москвы каждый день в 23:50 московского времени и проводит в дороге ровно 65 часов. Поезд Омск-Москва отправляется из Омска каждый день в 12:50 московского времени и проводит в дороге 63 часа 28 минут. Когда поезд доезжает до конечной станции, то он через час готов отправляться обратно. Сколько потребуется поездов для обеспечения бесперебойной работы железной дороги между этими городами?

► 10. Найдите такое натуральное число x , что

$$\text{НОД}(x, 6) + \text{НОК}(x, 6) = 2011.$$

**XIX Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2011»
7 класс
Заключительный тур**

- 1. *Савин А.Н.* Сколько существует натуральных чисел x таких, что
$$\text{НОК}(99, 105, x) = 6930?$$
- 2. Весь комплект домино выложили по правилам игры. Известно, что первой стоит пятерка. Какая цифра стоит последней?
- 3. В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC . Найдите угол ABC , если $AC = 2AB$.
- 4. Лотерейные билеты имеют четырехзначные номера, от 0000 до 9999. Сколько существует номеров билетов, которые содержат цифру 5, но не содержат цифру 0?
- 5. Вычислить $2012 \cdot 201120112011 - 2011 \cdot 201220122012$.
- 6. Задумано трехзначное число, у которого с любым из чисел 543, 142, 562 совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?
- 7. *Гусев А.А.* У Винни-Пуха есть 8 горшков меда весом 1, 2, 3, ..., 8 кг (на каждом горшке написан его вес), причем в один из горшков ему подложили кусочек сыра весом 1 кг. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти горшок с сыром? (классика сладкого жанра)
- 8. *Дворянинов С.В.* Набор из пяти отличных от нуля чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 обладает свойством: если каждое число в наборе заменить на произведение оставшихся четырех чисел, то получится тот же набор. Найдите произведение этих чисел.
- 9. Три ковбоя зашли в салун. Один купил 4 сэндвича, чашку кофе и 10 пончиков - всего на 1 доллар 69 центов. Второй купил 3 сэндвича, чашку кофе и 7 пончиков за 1 доллар 26 центов. Сколько заплатил третий ковбой за сэндвич, чашку кофе и пончик?
- 10. *Савин А.Н.* Двое лыжников шли с постоянной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 метров друг от друга. Потом они стали подниматься в большую горку, и скорость упала до 4 км/ч. Потом оба лыжника съехали с горки со скоростью 7 км/ч и попали в глубокий снег, где их скорость стала всего 3 км/ч. Каким стало расстояние между ними?

**ХІХ Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2011»**

8 класс

Заключительный тур

► 1. Решите уравнение $\frac{x-20}{11} + \frac{x-11}{20} = \frac{11}{x-20} + \frac{20}{x-11}$.

► 2. По кругу написано 2012 чисел, каждое из которых равно сумме двоих своих соседей. Чему равна сумма этих чисел.

► 3. Определите какое из чисел меньше:

$$201120112011^2 \text{ или } 201120112010 \cdot 201120112012?$$

► 4. *Савин А.Н.* Заряженного аккумулятора в сотовом телефоне хватает на 6 часов разговора или на 120 часов ожидания. У Фроси заряженный аккумулятор разрядился ровно через сутки. Сколько времени она проговорила по сотовому телефону за эти сутки?

► 5. *Лексина С.В.* В конкурсе научных проектов приняли участие две близняшки. На вопрос о том есть ли у них еще сестра и какого она возраста, они ответили: « У нас есть сестра, ее возраст записывается двумя одинаковыми цифрами, суммарный возраст нас троих - двузначное число, у которого вторая цифра вдвое больше первой». Определите возраст сестер.

► 6. Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60° , и точка пересечения высот делит одну из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC - равносторонний.

► 7. Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?

► 8. *Дворянинов С.В.* В параллелограмме, со сторонами 5 и 7, проведена диагональ. В каждый из двух полученных треугольников вписаны окружности, которые касаются диагонали в точках E и F . Найти длину отрезка EF .

► 9. **Задача-головоломка.** Разрезать квадратный кусок бумаги на 20 равных треугольников и сложить из них 5 равных квадратов.

► 10. **Старинная задача.** Трое крестьян, Иван, Михаил, Василий, пришли на рынок с женами: Марией, Екатериной и Анной. Кто на ком женат, нам не известно. Требуется узнать это на основании следующих данных: каждый из этих шести человек заплатил за каждый купленный предмет столько копеек, сколько предметов он купил. Каждый мужчина истратил на 48 копеек больше своей жены. Кроме того, Иван купил на 9 предметов больше Екатерины, а Михаил - на 7 предметов больше Марии.

**ХІХ Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2011»
9 класс
Заключительный тур**

► 1. **Андреева Л.В.** Для того, чтобы купить контрольный пакет акций ОАО «Родина», олигарху Покатину не хватает денег, а олигарху Порохову не хватает в два раза больше денег. Бережливый олигарх Абрам Романович накопил денег, сколько Покатин и Порохов имеют вместе, но и этих денег не достаточно для совершения сделки. Смогут ли олигархи купить контрольный пакет акций на троих? Смогут ли Порохов и Романович совершить сделку вдвоем?

► 2. **Дворянинов С.В.** В треугольнике ABC медиана BM образует со стороной AB угол в 20° , со стороной BC - 80° . Найдите отношение длины стороны AB к длине медианы BM .

► 3. **Кузьмин Ю.Н.** Решите уравнение

$$\sqrt{x^2 - 2011x + 2010} = 2010x - x^2 - 2009.$$

► 4. Дан отрезок единичной длины. Построить с помощью циркуля и линейки отрезок x такой, что $\frac{1}{x} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2011}$.

► 5. **Фольклор** Груз вначале погрузили в вагоны по 80 тонн, но один вагон остался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на 8 вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

► 6. **Алякин В.А.** Решите уравнение $x^{20} + x^{11} = 2 \cdot x^{2011}$.

► 7. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение одной группы на 2011 больше, чем другой группы. Найти эти числа.

► 8. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что

$$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right) = 0.$$

Докажите, что $f(-1)f(1) = 0$.

► 9. **Лексина С.В.** Пусть a, b, c, d - рациональные числа. Доказать, что существует треугольник со сторонами

$$\sqrt{b^2 + c^2}, \sqrt{a^2 + c^2 + d^2 + 2cd}, \sqrt{a^2 + b^2 + d^2 + 2ab},$$

площадь которого - рациональное число.

► 10. Не используя микрокалькулятор, найти значение числового выражения:

$$\sqrt[3]{50 + \sqrt{2495\frac{10}{27}}} + \sqrt[3]{50 - \sqrt{2495\frac{10}{27}}}.$$

**ХІХ Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2011»
10 класс
Заключительный тур**

► 1. *Андреева Л.В.* Известная итальянская мебельная фабрика PALI CUCCIOLI выпускает комоды и буфеты. Их производство ограничено наличием необходимых ресурсов (высококачественных досок из красного дерева (ВДКД), фурнитуры (Ф), стекла (С)). Нормы затрат ресурсов на единицу продукции, запасы ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице. Требуется составить производственный план выпуска продукции с учетом имеющихся ресурсов, который обеспечивал бы наибольшую прибыль фабрике.

Виды ресурсов	Комод	Буфет	Запасы ресурсов
ВДКД	3	2	27
Ф	2	4	28
Стекло	2	3	23
Прибыль	4000	7000	

- 2. *Андреев А.А.* Докажите, что число 63001999 - составное.
 ► 3. Дан единичный отрезок. Построить отрезок x такой, что

$$\sqrt{x} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{2011}.$$

► 4. *Лексина С.В.* Землемер - Трехглавый Змей Горыныч нарезает прямоугольные садовые участки. Первая голова измеряет длину x , вторая - ширину y , а третья, самая умная, которая знает все, в том числе и о первой и о второй головах, и даже то, что $8 \times 8 = 71$, записывает полупериметр p и площадь S участка. В его записях обнаружено

$$x = 111, y = 111, p = 224, S = 12103.$$

Продолжите запись: $x = 12, y = 21, p = ?, S = ?$.

- 5. Упростить выражение

$$\sqrt{2010 - \sqrt{2011 \cdot 2009}} + \sqrt{2008 - \sqrt{2009 \cdot 2007}} + \dots + \sqrt{2 - \sqrt{3 \cdot 1}}.$$

► 6. *Кузьмин Ю.Н.* Последовательность $\{a_n\}$ задана равенством $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}, (n > 3)$. Найдите $a_{2011} + a_{2007}$.

- 7. *Лексина С.В.* Найти положительные решения системы при $a, b > 0$

$$\begin{cases} \frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 8(y^4 - x^4), \\ ax - by = x^4 - y^4. \end{cases}$$

► 8. *Гусев А.А.* Найдите все трехзначные числа, любая степень которых оканчивается теми же тремя цифрами и в том же порядке, что и исходное число.

- 9. Доказать, что произведение $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{9999}{10000}$ меньше 0,01.

► 10. В треугольнике ABC заданы углы B, C и длина a стороны BC . Через середину O стороны AB и вершину A проведена окружность, касающаяся стороны BC . Вычислить радиус этой окружности.

**ХІХ Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2011»**

11 класс

Заключительный тур

► 1. *Саушкин И.Н.* Купил Роман раков, вчера - мелких, по цене 510 крон за штуку, а сегодня - по 990 крон, но очень крупных. Всего на раков он истратил 25200 крон, из них переплаты из-за отсутствия сдачи составили от 160 до 200 крон. Сколько Роман купил раков вчера и сколько сегодня, если крона - самая мелкая денежная единица?

► 2. *Кузьмин Ю.Н.* Решить систему уравнений

$$6x + 6y + 6z = 2xy + 2yz + 2zx + 14 = 3xyz + 18.$$

► 3. *Лексина С.В.* Докажите, что квадрат можно разрезать на 60 равных треугольников из которых можно сложить 10 квадратов.

► 4. *Гусев А.А.* Пусть a действительная постоянная. Найдите все решения уравнения. При каких значениях параметра a уравнение четвертой степени

$$a^3x^4 + 2a^2x^2 + x + a + 1 = 0$$

имеет нечетное число действительных решений.

► 5. *Лексина С.В.* В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, стоящем на грани $ABCD$ даны две точки M на ребре AB , M_1 на ребре $A_1 B_1$ такие, что $AM : MB = 3 : 2$, а $A_1 M_1 : M_1 B_1 = 2 : 3$. Муравей прополз по кратчайшему пути из точки M в точку M_1 так, что побывал на всех доступных гранях. Найти отношение скоростей муравья на горизонтальном участке и не на горизонтальных, если известно, что время проведенное им на горизонтальных участках равно времени проведенному им на не горизонтальных участках.

► 6. *Козлова Е.* Найти функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ удовлетворяющие уравнению

$$f(x + y) = g(x) + h(y) + xy(x + y + 2011)$$

и дифференцируемые в точке ноль.

► 7. *Андреева Л.В.* Брус размером $8 \times 27 \times 27$ распилить на 4 части, из которых можно сложить куб.

► 8. *Андреев А.А.* Докажите, что число 9000001999 является составным.

► 9. *Дворянинов С.В.* Дан прямоугольник со сторонами 28 см и 12 см. Существует ли треугольная пирамида, у которой все грани равные треугольники и длина каждого ребра выражается целым числом сантиметров и развертка которой совпадает с этим прямоугольником? Если да, то нарисуйте эту развертку и укажите длины всех ребер пирамиды.

► 10. *Андреев А.А.* Пусть $[x]$ - целая часть числа x - наибольшее целое число, не превосходящее x . Найдите наименьшее натуральное m , при котором найдется натуральное n , такое, что будет выполняться равенство

$$[\sqrt{m}] + [\sqrt{m+1}] + \dots + [\sqrt{n}] = 2011.$$