Условия задач,
решения и указания к решениям задач

Заключительный тур

XIX Межрегиональной олимпиады

школьников по математике

«САММАТ-2011»

6 - 11 класс

Самара, 2011

XIX Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2011»

6 класс

Задача 1. Дворянинов С.В. Двигаясь из Простоквашино в город с постоянной скоростью дядя Федор на первые 20 км пути затратил столько минут, сколько километров он проехал за 1 час 20 минут. Найти длину всего пути.

Ответ: 60 км.

Задача 2. После того, как в двузначном числе зачеркнули одну цифру, оно уменьшилось в 31 раз. Какое это число и какую цифру зачеркнули?

Решение.Одно из трех чисел: $31, 62, 93$, т.к. это число должно делиться на 31 по условию.

Задача 3. Корова вчетверо дороже собаки, а лошадь вчетверо дороже коровы. Собака, две коровы и лошадь стоят 200 р. Сколько стоит корова?

Решение. Собака+2 коровы+лошадь=(1+8+16) собак, отсюда 1 собака=200:25=8 р.

Ответ: 32 рубля.

Задача 4. 5. У папы Карло есть 130 дощечек. Из 5 дощечек он может сделать игрушечную мельницу, из 7 дощечек - пароход, из 14 дощечек - самолет. Самолет стоит 19 золотых, пароход - 8 золотых, мельница - 6 золотых. Какое наибольшее количество золотых может заработать папа Карло?

Ответ: 172 золотых. За 8 самолетов, 2 мельницы и 1 пароход (и еще одна дощечка останется).

Задача 5. Пираты имеют бочки с порохом весом в 1, 2, 3, 4, ..., 19, 20 пудов. Смогут ли пираты разложить бочки в три шхуны поровну (по весу).

Решение. Смогут, если поместят на первую шхуну бочки весом в 1, 4, 5, 8, 9, 12, 14, 17 пудов; на вторую - 2, 3, 6, 7, 10, 11, 15, 16 пудов; на третью шхуну - 13, 18, 19, 20 пудов. На каждой шхуне получится по 70 пудов пороха.

Задача 6. Гусев А.А. В жаркое лето 2010 года в Рязанской области в Сасовском районе 18 деревень оказались в зоне лесных пожаров. Количество домов в деревнях было поровну. Но подул ветер и в некоторых деревнях загорелись дома; в каких-то сгорела ровно половина домов, в каких-то - ровно треть, а в остальных ничего не сгорело. Отстояли жители свои деревни. При этом во всех деревнях вместе сгорела ровно одна девятая часть всех домов. В скольких деревнях жители спасли от пожара все дома? (Замечание. Автор уроженец Рязанской области, но точной статистикой лесных пожаров не обладает).

Решение. Количество домов в одной деревне назовем кварталом. По условию сгорело 2 квартала домов. При этом они сгорали порциями по $\frac{1}{2}$ или $\frac{1}{3}$ квартала. Как же из нескольких таких порций набрать 2 квартала? Ясно, что нужно взять два раза по $\frac{1}{2}$ квартала и три раза по $\frac{1}{3}$ квартала. Других способов нет, в чем легко убедиться небольшим перебором: если взять $\frac{1}{2}$ квартала, то оставшиеся 1,5 квартала невозможно набрать порциями по $\frac{1}{3}$ квартала, а если взять три раза по $\frac{1}{2}$ квартала, то оставшиеся полквартала нельзя выдать порциями по $\frac{1}{3}$ квартала. Всего будет использовано пять порций, значит, в 5 деревнях горели дома, а с остальных 13 деревнях - ничего не сгорело.

Задача 7. Гусев А.А. Саша купил тетрадь из 96 листов и пронумеровал страницы числами от 1 до 192 по порядку. Боря выбрал из этих листов 25 (не обязательно по порядку) и сложил 50 написанных на них чисел. У него получилось 2010. Докажите, что он ошибся. А могло ли у него получиться 2013?

Решение. Сумма чисел на двух сторонах одного листа нечетна. Сумма 25 нечетных чисел не может быть четной. Таким образом, 2010 получиться не могло. 2013 получиться тоже не может. Добавим по 1 к номерам всех нечетных страниц. При этом сумма чисел на 25 листах увеличится на 25. Но сумма чисел на каждом листе станет кратна 4 (сумма двух одинаковых чçтных чисел), а 2038 на 4 не делится.

Задача 8. Из всех двузначных чисел составили сплошную цепочку:

$$10111213141516...96979899,$$

и в полученном числе цифры $2, 3, 4, 7, 8$ покрасили золотой краской, а остальные цифры - серебряной. Какой краски понадобилось больше, если на каждую цифру тратится одно и то же количество краски?

Решение. Цифры $2, 3, 4, 7, 8$ - окрашиваются в золотую краску, цифры $0, 1, 5, 6, 9$ - окрашиваются в серебрянную краску. 0 в записи встречается 9 раз, 1, 2, 3, ... 9 в записи встречается по 19 раз. Следовательно, на цифры $2, 3, 4, 7, 8$ ушло $19 \times 5 = 95$ ед. краски, а на цифры $0, 1, 5, 6, 9$ $19 \times 4 + 9 = 85$ ед. краски. Значит, золотой краски ушло больше.

Задача 9. 6. Поезд Москва-Омск отправляется из Москвы каждый день в 23:50 московского времени и проводит в дороге ровно 65 часов. Поезд Омск-Москва отправляется из Омска каждый день в 12:50 московского времени и проводит в дороге 63 часа 28 минут. Когда поезд доезжает до конечной станции, то он через час готов отправляться обратно. Сколько потребуется поездов для обеспечения бесперебойной работы железной дороги между этими городами?

Ответ: 7 поездов.

Задача 10. Савин А.Н. 10. Найдите такое натуральное число x, что

$$\text{НОД}(x, 6) + \text{НОК}(x, 6) = 2011.$$

Решение. $\text{НОД}(x, 6)$ может быть равен только 1, 2, 3 или 6, но поскольку $\text{НОК}(x, 6)$ делится на 6, то $\text{НОД}(x, 6) = 1$, $\text{НОК}(x, 6) = 2010$. Так как x и 6 взаимно просты, то $6x = 2010$.

Ответ: $x = 335$.

XIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2011»

7 класс

Задача 1. Савин А.Н. Сколько существует натуральных чисел x таких, что

$$\text{НОК}(99,\ 105,\ \text{x}) = 6930?$$

Ответ: 24 числа.

Задача 2. Весь комплект домино выложили по правилам игры. Известно, что первой стоит пятерка. Какая цифра стоит последней?

Решение. Отметим, всего 28 доминошек: на всех доминошках ровно 8 доминошек с чистым полем, 8 - с единицей, 8 - с двойкой, ..., 8 - с шестеркой. После того, как мы разложили все доминошки в ряд, как несложно понять, все цифры на них разбиваются на пары. Т.к. каждой из цифр четное количество, то для всех цифр, кроме пятерки, будет пара. Следовательно, последней будет также пятерка.

Задача 3. В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найдите угол ABC, если $AC = 2AB$.

Указание. Пусть D - середина AC. Тогда $\triangle ABE = \triangle ADE = \triangle CDE$.

Ответ: 90^0.

Задача 4. 1. Лотерейные билеты имеют четырчхзначные номера, от 0000 до 9999. Сколько существует номеров, которые содержат цифру 5, но не содержат цифру 0?

Указание. Не содержат «0» - 9^4 числа, не содержат «0» и «5» - 8^4 числа.

Ответ: $9^4 - 8^4 = 2465$.

Задача 5. Вычислить $2012 \cdot 201120112011 - 2011 \cdot 201220122012$.

Решение. Введем обозначение $a = 2011$, тогда

$$(a+1)100010001a - a \cdot 100010001(a+1) = 0.$$

Ответ:0.

Задача 6. Задумано трехзначное число, у которого с любым из чисел $543, 142, 562$ совпадает один из разрядов, а два других не совпадают. Какое число задумано?

Решение. В число могут входить только цифры, $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Замечаем, что если в число входят цифры 2 (на месте единиц), 4 (на месте цифры десятков) или 5 (на месте цифр сотен), тогда с одним из чисел у исходного числа будет два совпадения. Пусть 543 - первое число, 142 - второе, 562 - третье.

Пусть у искомого числа на третьем месте стоит 5, тогда, т.к. должно быть совпадение цифр со вторым числом, то либо на месте десятков стоит 4, либо на месте сотен стоит 2. Но тогда два совпадения цифр либо с первым, либо с третьим числом.

Аналогично и для других цифр: 2 и 4.

Значит, в искомое число могут входить только цифры 1,3,6. Тогда несложно получить искомое число 163.

Ответ: 163.

Задача 7. Гусев А.А. У Винни-Пуха есть 8 горшков меда весом 1, 2, 3,..., 8 кг (на каждом горшке написан его вес), причем в один из горшков ему подложили кусочек сыра весом 1 кг. Как при помощи двух взвешиваний на чашечных весах без гирь найти горшок с сыром? (классика сладкого жанра)

Решение. Первым взвешиванием Винни-Пух может проверить равенство $3+4+8=7+6+2$, поставив на чаши соответствующие горшки. Если весы показывают равенство, сыр содержится в одном из двух оставшихся горшков. Тогда поставим на одну чашу весов горшки по 1 кг и 4 кг, а на другую чашу - горшок 5 кг. Если перевесил горшок в 5 кг, то сыр в нем; если горшки по 1 и 4 кг - сыр в килограммовом горшке; равновесие невозможно, поскольку из-за сыра вес одного из горшков мы учитываем неверно. Если в первом взвешивании перевесила левая чаша, сыр содержится в одном из горшков весом 3, 4 или 8 кг. Тогда вторым взвешиванием мы проверим равенство $3+5=8:$ в случае равновесия сыр находится в четырехкилограммовом горшке; если перевесила правая чаша - сыр в горшке весом 8 кг; если левая - в горшке весом 3 кг. Наконец, если в первом взвешивании перевесила правая чаша, сыр содержится в одном из горшков весом 2, 6, 7 кг. Вторым взвешиванием мы можем проверить равенство $2+5=7:$ в случае равновесия сыр находится горшке весом 6 кг; если перевесила правая чаша - сыр в горшке весом 7 кг; если левая - в горшке весом 2 кг.

Задача 8. Дворянинов С.В. Набор из пяти отличных от нуля чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 обладает свойством: если каждое число в наборе заменить на произведение оставшихся четырех чисел, то получится тот же набор. Найдите произведение этих чисел.

Ответ: 1.

Задача 9. Три ковбоя зашли в салун. Один купил 4 сандвича, чашку кофе и 10 пончиков - всего на 1 доллар 69 центов. Второй купил 3 сандвича, чашку кофе и 7 пончиков за 1 доллар 26 центов. Сколько заплатил третий ковбой за сандвич, чашку кофе и пончик?

Указание. С+К+П=3(3С+К+7П)-2(4С+К+10П).

Ответ: 40 центов.

Задача 10. Савин А.Н. Двое лыжников шли с постоянной скоростью 6 км/ч на расстоянии 200 метров друг от друга. Потом они стали подниматься в большую горку, и скорость упала до 4 км/ч. Потом оба лыжника съехали с горки со скоростью 7 км/ч и попали в глубокий снег, где их скорость стала всего 3 км/ч. Каким стало расстояние между ними?

Ответ: 100 метров.

XIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2011»

8 класс

Задача 1. Решите уравнение

$$\frac{x-20}{11}+\frac{x-11}{20}=\frac{11}{x-20}+\frac{20}{x-11}.$$

Ответ: $x=31$, $x=0$, $x=\frac{521}{31}$.

Задача 2. По кругу написано 2012 чисел, каждое из которых равно сумме двоих своих соседей. Чему равна сумма всех чисел.

Решение. Запишем для каждого числа равенство, в левой части которого стоит само число, а справа - сумма двух его соседей. В левой части получим сумму всез чисел записанных по кругу - S, а справа каждое число будет встречаться два раза, следовательно, сумма буде равна $2S$. Тогда $S=2S$, $S=0$.

Ответ: 0.

Задача 3. Определите какое из чисел меньше:

$$201120112011^2 \text{ или } 201120112010\cdot 201120112012?$$

Решение. Введем обозначение $x=201120112011$, тогда второе число можно записать $(x-1)(x+1)=x^2-1$. Значит, второе число меньше первого.

Задача 4. Заряженного аккумулятора в сотовом телефоне хватает на 6 часов разговора или на 120 часов ожидания. У Фроси заряженный аккумулятор разрядился ровно через сутки. Сколько времени она проговорила по сотовому телефону за эти сутки?

Указание. За час разговора аккумулятор разряжается на $\frac{1}{6}$, а за час ожидания - на $\frac{1}{120}$ часть своей чмкости. Пусть для того, чтобы аккумулятор разрядился через сутки, надо проговорить x часов. Тогда $\frac{x}{6}+\frac{24-x}{120}=1$.

Ответ: $\frac{96}{19}$ часа.

Задача 5. Лексина С.В. В конкурсе научных проектов приняли участие две близняшки. На вопрос о том есть ли у них еще сестра и какого она возраста, они ответили: «У нас есть сестра, ее возраст записывается двумя одинаковыми цифрами, суммарный возраст нас троих - двузначное число, у которого вторая цифра вдвое больше первой». Определите возраст сестер.

Решение. По условию задачи $\overline{aa}+2\overline{bc}=\overline{d(2d)}$, следовательно, a - четная цифра. Т.е. $a=2,4,6,8$, если $a\geq 4$, но тогда $d\geq 6$ и $2d$ уже не является цифрой. Значит, $d\geq 3$. Если $d=3$, то возраст каждой из близняшек составит $\frac{1}{2}(36-22)=7$, а их сестры - 12 лет. Если $d=4$, то возраст близняшек - 13 лет, а их сестры - 22 года. Если $d=5$, то $2d$ цифрой не будет.

Задача 6. Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60^0, и точка пересечения высот делит одну из них в отношении $2:1$, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC - равносторонний.

Решение. Пусть AD и CE - данные высоты, O - точка их пересечения. Из того, что в прямоугольном треугольнике AOE $\angle AOE=60^0$, следует, что $OE=\frac{1}{2}AO$, т.е. $OE=OD$. Значти, прямоугольные треугольники OEB и ODB равны. Тогда $BE=BD$, откуда следует, что $\triangle ABD=\triangle CBE$. Отсюда $AB=BC$. В то же время $\angle ABC=90^0-\angle BAD=\angle AOE=60^0$. Значит, $\triangle ABC$ - равносторонний.

Задача 7. Сумма обратных величин 10 попарно различных натуральных чисел равна 1. Могут ли все эти числа быть меньше 100?

Решение. $1 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + ... + (\frac{1}{9} - \frac{1}{10}) + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{90} + \frac{1}{10}$.

Ответ: да.

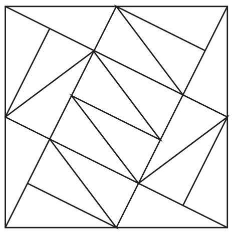
Задача 8. Дворянинов С.В. В параллелограмме, со сторонами 5 и 7, проведена диагональ. В каждый из двух полученных треугольников вписаны окружности, которые касаются диагонали в точках E и F. Найти длину отрезка EF.

Решение. Лемма. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами a, b, c. Обозначим $p = \frac{a+b+c}{2}$. Пусть в треугольник вписана окружность, которая касается сторон треугольника в точках M, N, K, тогда $AM = AN = x$, $NC = CK = y$, $BM = BK = z$, причем $p = x+y+z$. Следовательно, $x = p - a$, $y = p - b$, $z = p - c$.

Используя, данную лемму искомая величина $EF = 2$.

Задача 9. Задача-головоломка. Разрезать квадратный кусок бумаги на 20 равных треугольников и сложить из них 5 равных квадратов.

Решение.



Нетрудно показать, что в полученных прямоугольных треугольниках катеты таковы, что один вдвое больше другого. Не составляет труда сложить из полученных треугольников 5 равных квадратов.

Задача 10. Старинная задача. Трое крестьян, Иван, Михаил, Василий, пришли на рынок с женами: Марией, Екатериной и Анной. Кто на ком женат, нам не известно. Требуется узнать это на основании следующих данных: каждый из этих шести человек заплатил за каждый купленный предмет столько копеек, сколько предметов он купил. Каждый мужчина истратил на 48 копеек больше своей жены. Кроме того, Иван купил на 9 предметов больше Екатерины, а Михаил - 7 предметов больше Марии.

Решение. Если один из мужчин купил, скажем, x предметов, то по условию задачи он заплатил за них x^2 копеек. Если его жена купила y предметов, то она заплатила за них y^2 копеек. Значит, имеем $x^2 - y^2 = 48$, или $(x - y)(x + y) = 48$. Т.к. x, y целые и положительные, находим $x_1 = 13$, $y_1 = 11$, $x_2 = 8$, y_4, $x_3 = 7$, $y_3 = 1$.

Отыскивая те значения x и y, разность которых равна 9, находим, что Иван купил 13 предметов, Екатерина - 4 предмета. Точно так же Михаил купил 8 предметов, Мария - 1 предмет. Таким образом, имеем следующие пары: (Иван - 13, Анна - 11); (Михаил - 8, Екатерина - 4); (Василий -7, Мария - 1).

XIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2011»

9 класс

Задача 1. Андреева Л.В. Для того, чтобы купить контрольный пакет акций ОАО «Родина», олигарху Покатину не хватает денег, а олигарху Порохову не хватает в два раза больше денег. Бережливый олигарх Абрам Романович накопил денег, сколько Покатин и Порохов имеют вместе, но и этих денег не достаточно для совершения сделки. Смогут ли олигархи купить контрольный пакет акций на троих? Смогут ли Порохов и Романович совершить сделку вдвоем?

Решение. Пусть x количество денег у Покатина, y - количество денег у Порохова, $x + y$ - количество денег у Романовича, N- стоимость контрольного пакета акций ОАО «Родина».

По условию задачи $N-x$ количество денег недостающих для покупки акций у Покатина, $N - y$ количество денег недостающих для покупки акций у Порохова, тогда по условию задачи $2(N - x) = N - y \Longrightarrow N = 2x - y$. У всех троих олигархов $2x + 2y$ денег. Т.к. $2x + 2y > 2x - y$, то втроем олигархи смогут купить контрольный пакет акций.

Вторая часть. $2y + x$ - деньги Порохова и Романовича. Для покупки акций Пороховым и Романовичем должно выполняться условие:

$$2y + x \geq 2x - y,$$

$$3y \geq x,$$

$$y \geq \frac{x}{3} = \frac{1}{3}((x + y) - y),$$

$$y \geq 0,25(x + y)$$

т.е. если денег у Порохова не менее 25% от капитала Романовича, то Порохов и Романович смогут совершить сделку и купить контрольный пакет акций, иначе нет.

Задача 2. Дворянинов С.В. В треугольнике ABC медиана BM образует со стороной AB угол в 20^0, со стороной BC - 80^0. Найдите отношение длины стороны AB к длине медианы BM.

Решение. Проведем из точки A луч параллельный стороне BC до пересечения с продолжением медианы BM. Обозначим через K точку их пересечения. Получаем, что треугольник ABK - равнобедренный ($AB = BK$). Четырехугольник $ABCK$ - параллелограмм, $BM = \frac{1}{2}BK$, следовательно, $\frac{AB}{BM} = 2$.

Задача 3. Кузьмин Ю.Н. Найдите целые решения уравнения

$$\sqrt{x^2 - 2011x + 2010} = 2010x - x^2 - 2009.$$

Решение.

$$\begin{cases} x^2 - 2011x + 2010 \geq 0, \\ x^2 - 2010x + 2009 \leq 0. \end{cases}$$

Ответ: 1.

Задача 4. Дан единичный отрезок. Построить с помощью циркуля и линейки отрезок x такой, что $\frac{1}{x} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2011}$.

Решение. Введем $\frac{1}{y_1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $y_1 = \frac{ab}{a+b} = \frac{\sqrt{ab}}{2}\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}}$, где $\sqrt{ab} = m$ - среденее геометрическое, $n = \frac{a+b}{2}$ - среднее арифметическое, тогда $y_1 = \frac{1}{2}m\frac{m}{n}$, $\frac{y_1}{\frac{m}{2}} = \frac{m}{n}$ (т. Фалеса.)

По аналогии с отрезком y_1 выполним 2009 аналогичных построения.

Искомый отрезок $x : \frac{1}{x} = \frac{1}{1} + ... + \frac{1}{2011}$, тогда получим из $x = \frac{1}{2}\sqrt{y_{2009}c}\frac{\sqrt{y_{2009}c}}{\frac{y_{2009}+c}{2}}$, где с=2011.

Задача 5. Фольклор Груз вначале погрузили в вагоны по 80 тонн, но один вагон остался загружен не полностью. Тогда весь груз переложили в вагоны вместимостью по 60 тонн, однако понадобилось на 8 вагонов больше и при этом все равно один вагон остался не полностью загруженным. Наконец, груз переложили в вагоны вместимостью по 50 тонн, однако понадобилось еще на 5 вагонов больше, при этом все такие вагоны были загружены полностью. Сколько тонн груза было?

Решение. Пусть x т - масса груза, n - количество вагонов вместимостью 80 тонн, включая один неполный. Тогда из условия задачи должны выпоняться следующие ограничения:

$$\begin{cases} 80(n-1) < x < 80n, \\ 60(n+7) < x < 60(n+8), \\ x = 50(n+8+5); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 80(n-1) < 50(n+13) < 80n, \\ 60(n+7) < 50(n+13) < 60(n+8), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 650 < 30n < 730, \\ 170 < 10n < 230, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 21\frac{2}{3} < n < 24\frac{1}{3}, \\ 17 < n < 23, \end{cases}$$

следовательно, $21\frac{2}{3} < n < 23$.

Вывод: $n = 22$ вагона по 80 тонн, тогда $n + 13 = 35$ вагонов по 50 тонн, и искомый груз имеет 1750 тонн.

Ответ: 1750.

Задача 6. Алякин В.А. Решите уравнение $x^{20} + x^{11} = 2 \cdot x^{2011}$.

Решение. Очевидно, что $x = 0$, $x = 1$ корни данного уравнения.

Пусть $x \neq 0$, сократим на x^{11},

$$x^9 + 1 = 2 \cdot x^{2000}.$$

Если $x > 1$, то $x^{2000} > x^9$, $x^{2000} > 1$, следовательно, $2x^{2000} > x^9 + 1$.

Если $0 < x < 1$, то $x^{2000} < x^9$, $x^{2000} < 1$, следовательно, $2x^{2000} < x^9 + 1$.

Если $x < -1$, то $x^{2000} > x^9$, $x^{2000} > 1$, следовательно, $2x^{2000} > x^9 + 1$.

Если $-1 < x < 0$, то рассмотрим функции $f(x) = x^9 + 1$, $g(x) = 2x^{2000}$. Получаем, $f(0) = 1$, $f(-1) = 0$, $g(0) = 0$, $g(-1) = 2$, следовательно, исходное уравнение имеет корень из промежутка $(-1, 0)$.

Ответ: $x = 0$, $x = 1$, $x \in (-1, 0)$.

Задача 7. Четыре последовательных натуральных числа разбиты на две группы по 2 числа. Известно, что произведение одной группы на 2011 больше, чем другой группы. Найти эти числа.

Решение. Заметим, что если в обеих группах есть четное число, то оба произведения четны и из разность не может быть равна 2011. Поэтому в одной группе четные числа, а в другой нечетные. Обозначим эти числа - $(x-1)$, x, $(x+1)$, $(x+2)$. Тогда произведения $\prod_1 = (x-1)(x+2) = x^2 - 1$, $\prod_2 = x(x+2) = x^2 + 2x$. Т.к. $x \in N$, значит,

$$2011 = (x^2 + 2x) - (x^2 - 1) = 2x + 1, \quad x = 1005.$$

Поэтому искомые числа: 1004, 1005, 1006, 1007.

Ответ:1004, 1005, 1006, 1007.

Задача 8. Квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ таков, что

$$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = f\left(\frac{c-a-b}{2a}\right) = 0.$$

Докажите, что $f(-1)f(1) = 0$.

Решение. Утветждение задачи следует из равенства

$$f\left(\frac{a-b-c}{2a}\right) = \frac{a(a-b-c)^2}{4a^2} + \frac{b(a-b-c)}{2a} + c = \frac{(a-b+c)(a+b+c)}{4a} = \frac{f(-1)f(1)}{4a} = 0.$$

Задача 9. Лексина С.В. Пусть a, b, c, d - рациональные числа. Доказать, что существует треугольник со сторонами $\sqrt{b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$, $\sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$, площадь которого - рациональное число.

Решение. Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, на сторонах $AB = a+b$ и $CD = c+d$ выберем точки K и M соответственно, так что $AK = b$, $KB = a$, $AM = c$, $MD = d$. Тогда треугольник KMC имеет стороны $KM = \sqrt{b^2+c^2}$, $KC = \sqrt{a^2+c^2+d^2+2cd}$, $CM = \sqrt{a^2+b^2+d^2+2ab}$.

$S_{KMC} = (a+b)(c+d) - \frac{1}{2}[bc + d(a+b) + a(c+d)] = \frac{ac+bc+bd}{2}$- рациональное число.

Задача 10. Не используя микрокалькулятор, найти значение числового выражения:

$$\sqrt[3]{50+\sqrt{2495\frac{10}{27}}} + \sqrt[3]{50-\sqrt{2495\frac{10}{27}}}.$$

Решение. Введем обозначение

$$x = \sqrt[3]{50+\sqrt{2495\frac{10}{27}}} + \sqrt[3]{50-\sqrt{2495\frac{10}{27}}},$$

$$x^3 = 100 + 3\sqrt[3]{\left(50+\sqrt{2495\frac{10}{27}}\right)\left(50-\sqrt{2495\frac{10}{27}}\right)} \quad x,$$

$$x^3 - 5x - 100 = 0,$$

$$(x-5)(x^2+5x+20) = 0,$$

$$(x^2+5x+20) = 0, D = 25 - 80 < 0,$$

$$x = 5.$$

Ответ: 5.

XIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2011»

10 класс

Задача 1. Андреева Л.В. Известная итальянская мебельная фабрика PALI CUCCIOLI выпускает комоды и буфеты. Их производство ограничено наличием необходимых ресурсов (высококачественных досок из красного дерева (ВДКД), фарнитуры (Ф), стекла (С)). Нормы затрат ресурсов на единицу продукции, запасы ресурсов и прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице. Требуется составить производственный план выпуска продукции с учетом имеющихся ресурсов, который обеспечивал бы наибольшую прибыль фабрике.

Виды ресурсов	Комод	Буфет	Запасы ресурсов
ВДКД	3	2	27
Ф	2	4	28
Стекло	2	3	23
Прибыль	4000	7000	

Решение. Пусть x - число комодов, y - число буфетов, тогда согласно условию задачи получаем систему ограничений

$$\begin{cases} 3x+2y \leq 27, \\ 2x+4y \leq 28, \\ 2x+3y \leq 23, \\ x, y \geq 0, \\ x, y \in Z. \end{cases}$$

$F = 4000x + 7000y$ - прибыль, которую стоит максимизировать. Из системы ограничений получаем, что (0;7), (9;0), (4,5). Тогда максимально возможная прибыль составит 51000 у.е.

Ответ: 51000.

Задача 2. Упростить выражение

$$\sqrt{2010-\sqrt{2011\cdot 2009}}+\sqrt{2008-\sqrt{2009\cdot 2007}}+...+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}.$$

Решение. Заметим, что каждый из корней представим в виде:

$$\sqrt{2010-\sqrt{2011\cdot 2009}}=\frac{\sqrt{2011}-\sqrt{2009}}{\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{2008-\sqrt{2009\cdot 2007}}=\frac{\sqrt{2009}-\sqrt{2007}}{\sqrt{2}},$$

$$...$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}.$$

Сложив эти равенства, имеем:

$$\sqrt{2010-\sqrt{2011\cdot 2009}}+\sqrt{2008-\sqrt{2009\cdot 2007}}+...+\sqrt{2-\sqrt{3\cdot 1}}=\frac{\sqrt{2011}-\sqrt{1}}{\sqrt{2}}.$$

Задача 3. Дан единичный отрезок. Построить отрезок x такой, что

$$\sqrt{x}=\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+...+\sqrt{2011}.$$

Решение. Рассмотрим равенство

$$\sqrt{x} = \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{2011}$$

умножим его на $\sqrt{1}$, получим:

$$\sqrt{x \cdot 1} = \sqrt{1 \cdot 1} + \sqrt{2 \cdot 1} + \sqrt{3 \cdot 1} + ... + \sqrt{2011 \cdot 1}.$$

1. Зная отрезок единичной длины, можно построить отрезок длиной n ($n = \overline{2, 2011}$), (2010 операций.)

2. Каждое слагаемое строим как среднее геометрическое двух отрезков 1 и n. (2010 построений.)

3. Найти сумму всех найденных средне геометрических

$$b = \sqrt{1 \cdot 1} + \sqrt{2 \cdot 1} + \sqrt{3 \cdot 1} + ... + \sqrt{2011 \cdot 1}.$$

4. Обратная задача: по среднему геометрическому b двух отрезков, один из которых дан - единичный отрезок, найти второй отрезок x.

В задаче необходимо показать как, с помощью циркуля и линейки построить:

- среднее геометрическое двух отрезков;
- прямоугольный треугольник по двум катетам;
- из точки восстановить перпендикуляр.

Задача 4. Лексина С.В. Землемер - Трехглавый Змей Горыныч нарезает прямоугольные садовые участки. Первая голова измеряет длину x, вторая - ширину y, а третья, самая умная, которая знает все, в том числе и о первой и о второй головах, и даже то, что $8 \times 8 = 71$, записывает полупериметр p и площадь S участка. В его записях обнаружено

$$x = 111, y = 111, p = 224, S = 12103.$$

Продолжите запись:

$$x = 12, y = 21, p = ?, S = ?.$$

Решение. Из равенства $8 \times 8 = 71$, следует, что оно записано в системе счисления с основанием 9. Третья голова вычисляет в девятиричной системе счисления. Тогда $p = 224_9 = 2 \cdot 81 + 2 \cdot 9 + 4 = 184$. $x + y = 184_{10}$. $S = 12103 = 1 \cdot 9^4 + 2 \cdot 9^3 + 1 \cdot 9^2 + 3 = 8103_{10}$, $x \cdot y = 8103$.

$$\begin{cases} x + y = 184, \\ xy = 8103. \end{cases}$$

Данная система имеет решение $(73; 111), (111; 73)$, тогда $a^2 + a + 1 = 111, a = 10$; $b^2 + b + 1 = 73, b = 8$. Следовательно, $p = 29_{10} = 32_9$, $S = 204_{10} = 246_9$.

Рассмотрим второй случай, когда I голова работает в 8-ой системе счисления, а II голова в 10-ой системе счисления.

$\begin{cases} x = 12_8 = 10_{10}, \\ y = 21_{10}, \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 31_{10} = 34_9, \\ xy = 210_{10} = 253_9. \end{cases}$

Следовательно, однозначного ответа нет. Возможны две ситуации.

Задача 5. Андреев А.А. Докажите, что число 63001999 - составное.

Решение. Введем обозначение $x = 1000$, тогда данное число можно представить $63x^2 + 2x - 1 = (9x - 1)(7x + 1) = 8999 \cdot 7001$. Отметим, что оба сомножителя - числа простые.

Задача 6. Кузьмин Ю.Н. Последовательность $\{a_n\}$ задана равенством $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = -1$, $a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-3}$, $(n > 3)$. Найдите $a_{2011} + a_{2007}$.

Решение.

$$a_4 = a_3a_1 = -1,$$
$$a_5 = a_4a_2 = -1,$$
$$a_6 = a_5a_3 = 1,$$
$$a_7 = a_6a_4 = -1,$$
$$a_8 = a_7a_5 = 1,$$
$$a_9 = a_8a_6 = 1,$$
$$a_{10} = a_9a_7 = -1,$$
$$a_{11} = a_{10}a_8 = -1,$$
$$a_{12} = a_{11}a_9 = -1,$$
$$a_{13} = a_{12}a_{10} = -1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_7 = a_{14} = \ldots = a_{7k} = -1,$$
$$a_{7k+1} = 1, \quad a_{7k+2} = 1,$$
$$a_{7k+3} = -1, \quad a_{7k+4} = -1, a_{7k+5} = -1,$$
$$a_{2011} = a_{287\cdot 7+2} = 1,$$
$$a_{2007} = a_{286\cdot 7+5} = -1,$$

Следовательно, $a_{2011} + a_{2007} = 0$.

Задача 7. Лексина С.В. Найти положительные решения системы

$$\begin{cases} \frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 8(y^4 - x^4), \\ ax - by = x^4 - y^4, \end{cases}$$

при $a, b > 0$.

Решение. Умножим первое уравнение системы на x^4, а во втором уравнение возведем обе части в квадрат, получим:

$$\begin{cases} a^2x^2 = b^2\frac{x^4}{y^2} + 8x^4(y^4 - x^4), \\ a^2x^2 = b^2y^2 + 2by(x^4 - y^4) + (x^4 - y^4)^2, \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения системы второе, получим:

$$b^2\frac{x^4 - y^2}{y^2} - 2by(x^4 - y^4) - (x^4 - y^4)(9x^4 - y^4) = 0.$$

Если $x \neq y$, то получаем квадратное уравнение относительно b.

$$b^2 - 2by^3 - y^2(9x^4 - y^4) = 0,$$

$$b = y^3 \pm 3x^2y.$$

$$\begin{cases} b = y^3 + 3x^2y, \\ a = x^3 + 3xy^2, \end{cases} \quad \begin{cases} a + b = (x + y)^3, \\ a - b = (x - y)^3, \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = \sqrt[3]{a + b}, \\ x - y = \sqrt[3]{a - b}, \end{cases}$$

тогда, $(x, y) = \left(\frac{\sqrt[3]{a+b}+\sqrt[3]{a-b}}{2}, \frac{\sqrt[3]{a+b}-\sqrt[3]{a-b}}{2}\right)$.

Система $\begin{cases} b = y^3 - 3x^2y, \\ a = x^3 - 3xy^2, \end{cases}$ не имеет решений.

Задача 8. Гусев А.А Найдите все трехзначные числа, любая степень которых оканчивается теми же тремя цифрами и в том же порядке, что и исходное число.

Решение. $N = \overline{abc} = 100a + 10b + c$.

$N^2 = (100a)^2 + (10b)^2 + c^2 + 2000ab + 200ac + 20bc = 1000M + 100(b^2 + 2bc) + 10(2bc) + c^2 = 1000M + N_1$.

Рассмотрим N_1, при $c = 0, 1, 5, 6$.

При $c = 0$, $N_1 = 100b^2$, заметим, что степень выше 3 оканчивается на нули.

При $c = 1$, $N_1 = 100(b^2 + 2a) + 10(2b) + 1$, $2b = 10N + b$, $b = 10N$, $N = 0$, $b = 0$, следовательно, $N_1 = 100(2a) + 0 \cdot 10 + 1$, $2a = 10N + a$, $a = 0$. 001 - не является трехзначным.

При $c = 5$, $N_1 = 100(b^2 + 10a) + 10(10b + 2) + 5 = 100(b^2 + b) + 2 \cdot 10 + 5$, $b^2 + b = 6$, $b = 2$. 625, $625^2 = 390625$, $625^n = 625^{n-1}625$

При $c = 6$, $N_1 = 100(b^2 + 12a) + 120b + 36 = 100(b^2 + b + 2a) + (2b + 3)10 + 6$

376.

Ответ: 625; 376.

Задача 9. Доказать, что произведение

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{9999}{10000}$$

меньше $0,01$.

Решение. Введем обозначение $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{9999}{10000}$ и нововое произведение $A_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{9998}{9999}$. Заметим, что $A < A_1$, т.к. $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$, $\frac{3}{4} < \frac{4}{5}$, ... $\frac{9997}{9998} < \frac{9998}{9999}$, $\frac{9999}{10000} < 1$. Кроме того, $A_1 \cdot A = 0,0001$.

Таким образом, $A^2 < A \cdot A_1 = 0,0001$, следовательно, $A < 0,01$.

Задача 10. В треугольнике ABC заданы углы B, C и длина a стороны BC. Через середину O стороны AB и вершину A проведена окружность, касающаяся стороны BC. Вычислить радиус этой окружности.

Решение. Пусть $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $BC = a$, E - центр окружности, M - точка касания окружности стороны BC.

Рассмотрим $\triangle ABC$, $AB = \frac{a \sin\gamma}{\sin(\gamma+\beta)}$, $AC = \frac{a\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$.

$\angle BMO = \angle MEK$ (угол между касательной и хордой равен половине угла между радиусами).

$\angle OAM$ - вписанный и опирается на дугу $\breve{OM}$, следовательно, $\angle OAM = \frac{1}{2}\breve{OM}$. $\angle OEM$ - центральный, $\angle OEM = \breve{OM} \Longrightarrow \angle MEK = \frac{1}{2}\breve{OM} \Longrightarrow \angle BMO = \frac{1}{2}\breve{OM} \Longrightarrow \angle BMO = \angle BAM \Longrightarrow \triangle BAM \backsim \triangle BMO \Longrightarrow \frac{BA}{BM} = \frac{BM}{BO} \Rightarrow BM^2 = BA \cdot BO \Rightarrow BM^2 = \frac{1}{2}AB \Rightarrow BM = \frac{a\sin\gamma}{\sqrt{2}\sin(\beta+\gamma)}$.

Рассмотрим $\triangle OBM$, по теореме косинусов:

$$OM^2 = \frac{a^2\sin^2\gamma}{\sin^2(\gamma+\beta)} \frac{3\sqrt{2} - 4\cos\beta}{4\sqrt{2}}.$$

Введем обозначение $\angle BMO = \alpha$, тогда $\frac{OB}{\sin\alpha} = \frac{OM}{\sin\beta}$.

$\sin\alpha = \frac{OB\sin\beta}{OM} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{24}\cos\beta}}\sin\beta = \sin\angle KEM$.

$\sin\angle KEM = \frac{KM}{R} \Rightarrow R = \frac{KM}{\sin\angle KEM}$.

$R = \frac{a\sin\gamma}{4\sin(\beta+\gamma)}\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-4\cos\beta}{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{3\sqrt{2}-4\cos\beta}{\sqrt{2}}}\frac{1}{\sin\beta} = \frac{a\sin\gamma(6-4\sqrt{2}\cos\beta)}{8\sin\beta\sin(\beta+\gamma)}$.

XIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2011»

11 класс

Задача 1. Саушкин И.Н. Купил Роман раков, вчера - мелких, по цене 510 крон за штуку, а сегодня - по 990 крон, но очень крупных. Всего на раков он истратил 25200 крон, из них переплаты из-за отсутствия сдачи составили от 160 до 200 крон. Сколько Роман купил раков вчера и сколько сегодня, если крона - самая мелкая денежная единица?

Решение. Пусть x - количество мелких раков, y - количество крупных раков, N - переплата, причем $160 \le N \le 200$. По условию задачи

$$510x + 990y + N = 25200,$$

$$51x + 99y + N = 2520, \quad 16 \le N \le 20.$$

В последнем равенстве члены $51x$, $99y$, 2520 - делятся на 3, следовательно, N делится на 3, значит, $N = 18$. Тогда

$$51x + 99y = 2502,$$

$$17x + 33y = 834,$$

$$17x - 34 + 33y = 800,$$

$$17(x-2) + 33y = 16(17+33),$$

$$17(18-x) = 33(y-16),$$

$$\begin{cases} 18 - x = 33t, \\ y - 16 = 17t, \end{cases} \begin{cases} x = 18 - 33t > 0, \\ y = 17t + 16 > 0, \end{cases}$$

Следовательно, $-\frac{16}{17} < t < \frac{18}{33}, t \in Z$.

Значит, Роман купил 18 мелких раков и 16 крупных раков.

Задача 2. Кузьмин Ю.Н. Решить систему уравнений

$$6x + 6y + 6z = 2xy + 2yz + 2zx + 14 = 3xyz + 18.$$

Решение. Введем обозначение

$$6x + 6y + 6z = 2xy + 2yz + 2zx + 14 = 3xyz + 18 = b,$$

тогда

$$\begin{cases} x + y + z = \frac{b}{6}, \\ xy + yz + zx = \frac{b-14}{2}, \\ xyz = \frac{b-18}{3}, \end{cases}$$

тогда, x, y, z можно рассматривать как решение уравнения

$$t^3 - \frac{b}{6}t^2 + \frac{b-14}{2}t - \frac{b}{3} + 6 = 0,$$

которое можно переписать в виде:

$$t^3 - 7t + 6 - \frac{b}{6}(t^2 - 3t + 2) = 0,$$

$$(t-1)(t-2)(t-3) - \frac{b}{6}(t-1)(t-2) = 0,$$

$$\left\{\begin{array}{l} t=1, \\ t=2, \\ t=\frac{b}{6}-3=a, \end{array}\right.$$

Ответ: $(1,2,a)$; $(2,1,a)$; $(1,a,2)$; $(2,a,1)$; $(a,1,2)$; $(a,2,1)$.

Задача 3. Лексина С.В. Докажите, что квадрат можно разрезать на 60 равных треугольников из которых можно сложить 10 квадратов.

Указание. Смотри задачу 9 из 8 класса. Отличие состоит в том, что сторону необходимо разбить на три равные части.

Задача 4. Гусев А.А. Пусть a действительная постоянная. Найдите все решения уравнения. При каких значениях параметра a уравнение четвертой степени

$$a^3x^4+2a^2x^2+x+a+1=0$$

имеет нечетное число действительных решений.

Решение. Если $a=0$, то $x=-1$.

Пусть $a\neq 0$ выполним замену $ax=t$, получим уравнение

$$t^4+2at^2+t+a^2+a=0.$$

Перепишем это уравнение как квадратное относительно a.

$$a^2+a(2t^2+1)+t^4+t=0,$$

$$a=\frac{-2t^2-1\pm(2t-1)}{2}=\left[\begin{array}{l} -t^2+t-1, \\ -t^2-t. \end{array}\right.$$

Следовательно, многочлен стоящей в левой части уравнения представим:

$$(t^2-t+1+a)(t^2+t+a)=0.$$

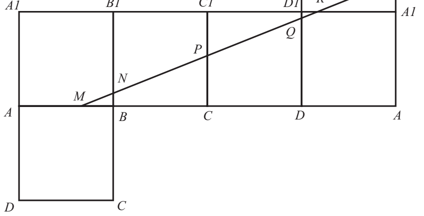
Получим два уравнения, решим их относительно переменной t.

$$t=\frac{1\pm\sqrt{-3-4a}}{2}, \qquad t=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}.$$

Если $a=\frac{1}{4}$, то имеем одно решение $x=-2$. Если $a=-\frac{3}{4}$, то $t=\frac{1}{2}$ и $t=\frac{-1\pm 2}{2}$, получаем два решения $x=2$ и $x=-\frac{2}{3}$. Следовательно, уравнение четвертой степени имеет нечетное число действительных решений при $a=0$ и $a=\frac{1}{4}$.

Задача 5. Лексина С.В. В единичном кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, стоящем на грани $ABCD$ даны две точки M на ребре AB, M_1 на ребре A_1B_1 такие, что $AM:MB=3:2$, а $A_1M_1:M_1B_1=2:3$. Муравей прополз по кратчайшему пути из точки M в точку M_1 так, что побывал на всех доступных гранях. Найти отношение скоростей муравья на горизонтальном участке и не на горизонтальных, если известно, что время проведенное им на горизинтальных участках равно времени проведенному им на не горизонтальных участках.

Указание.



MM_1 — кратчайший путь из точки M в точку M_1 так чтобы побывать на всех доступных гранях. Тогда находим расстояние пройденное муравьем на горизонтальном участке и путь пройденный не по горизонтальным участкам.

Ответ: 2,5.

Задача 6. Козлова Е. Найти функции $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ удовлетворяющие уравнению

$$f(x+y) = g(x) + h(y) + xy(x+y+2011)$$

и дифференцируемые в точке ноль.

Решение.

При $x = y = 0$, $f((0) = g(0) + h(0)$.

При $y = 0$, $f(x) = g(x) + h(0)$.

При $x = 0$, $f(y) = g(0) + h(y)$.

Тогда $f(x+y) = f(x) + f(y) - f(0) + xy(x+y+2011)$.

Пусть $y = \triangle x$, тогда

$$f(x+\triangle x) - f(x) = f(\triangle x) - f(0) + x \triangle x(x + \triangle x + 2011),$$

$$\frac{f(x+\triangle x) - f(x)}{\triangle x} = \frac{f(\triangle x) - f(0)}{\triangle x} + x^2 + x \triangle x + 2011x,$$

$$f'(x) = x^2 + 2011x + A,$$

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2011}{2}x^2 + Ax + B + C,$$

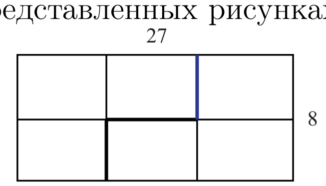
где $B + C = f(0) = h(0) + g(0)$,

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2011}{2}x^2 + Ax + B,$$

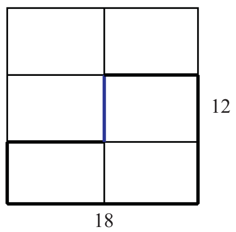
$$h(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2011}{2}x^2 + Ax + C.$$

Задача 7. Андреева Л.В. Брус размером $8 \times 27 \times 27$ распилить на 4 части, из которых можно сложить куб.

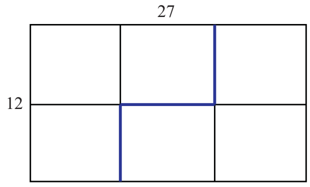
Решение. $V = 8 \cdot 27 \cdot 27 = 18^3$, следовательно, ребро куба - 18. Выполнив распилы как показано на представленных рисунках получим куб с ребром 18.



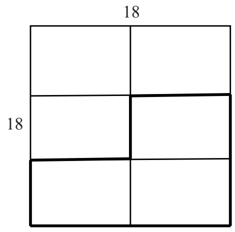
1 шаг.



2 шаг.



3 шаг.



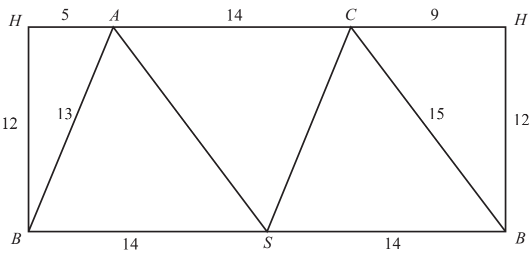
4 шаг.

Задача 8. Андреев А.А. Докажите, что число 9000001999 является составным.

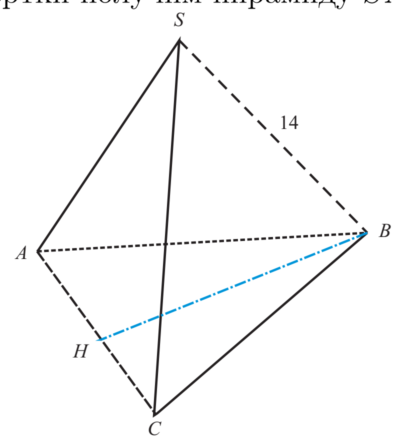
Решение. Введем обозначение $x = 1000$, тогда данное число можно представить в виде $9x^3 + 2x - 1 = (3x - 1)(3x^2 + x + 1) = 2999 \cdot 3001001$.

Задача 9. Дворянинов С.В. Дан прямоугольник со сторонами 28 см и 12 см. Существует ли треугольная пирамида, у которой все грани равные треугольники и длина каждого ребра выражается целым числом сантиметров и развертка которой совпадает с этим прямоугольником? Если да, то нарисуйте эту развчртку и укажите длины всех ребер пирамиды.

Указание.



Из полученной развертки получим пирамиду $SABC$.



Задача 10. Андреев А.А. Пусть $[x]$ - целая часть числа x - наибольшее целое число, непревосходящее x. Найдите наименьшее натуральное m, при котором найдется натуральное n, такое, что будет выполняться равенство

$$[\sqrt{m}] + [\sqrt{m+1}] + ... + [\sqrt{n}] = 2011.$$

Решение. Заметим,

$$\underbrace{[\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]}_{1\cdot 3} + \underbrace{[\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + ... + [\sqrt{8}]}_{2\cdot 5} + \underbrace{[\sqrt{9}] + [\sqrt{10}] + ... + [\sqrt{15}]}_{3\cdot 7} + ...$$

Введем обозначение $[\sqrt{m}]=k$, тогда $k\le\sqrt{m}<k+1$, $k^2\le m\le k^2+2k$ $(2k+1)$ чисел.

Вычислим сумму

$$S_{n^2-1}=[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+...+[\sqrt{n^2-1}]=\sum_{k=1}^{n-1}k(2k+1)=2\sum k^2+\sum k=$$

$$=2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{6}=\frac{n(n-1)(4n+1)}{6}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

При $n=13$, $S_{168}=1378$;

При $n=14$, $S_{195}=1729$;

При $n=15$, $S_{224}=2135$.

Пусть x— количество слагаемых равных 14.

$$S_{195}+S=2011,\quad S=282, S=14x\Rightarrow x\ge 21.$$

$$282=14\cdot 21-12=14\cdot 22-26=14\cdot 23-40=14\cdot 24-54=...$$

1) $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+...+[\sqrt{m-1}]=12,\quad 1\cdot 3+2\cdot y=12$, где y— количество слагаемых равных 2;

2) $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+...+[\sqrt{m-1}]=26,\quad 1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot y=26$, где y— количество слагаемых равных 3;

3) $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+...+[\sqrt{m-1}]=40,\quad 1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot y=40$, где y— количество слагаемых равных 4;

4) 2) $[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+...+[\sqrt{m-1}]=54,\quad 1\cdot 3+2\cdot 5+3\cdot 7+4\cdot y=54$, $4y=20$, $y=5$, где y— количество слагаемых равных 4;

$$[\sqrt{1}]+[\sqrt{2}]+...+[\sqrt{15}]+[\sqrt{16}]+[\sqrt{17}]+[\sqrt{18}]+[\sqrt{19}]+[\sqrt{20}]=54,$$
$$m-1=20,\quad m=21.$$

При $m=21$, найдется число $n=219$, при котором исходное равенство будет верным. Непосредственной подстановкой убеждаемся в этом.