Условия задач,
решения и указания к решениям задач

Заключительный тур

XXI Межрегиональной олимпиады

школьников по математике

«САММАТ-2013»

6 - 11 класс

Самара, 2013

XXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2013»

6 класс

1. Сколько надо взять слагаемых суммы $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ...$ чтобы получилось трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

Решение. $\frac{n(n+1)}{2} = aaa$, $n(n+1) = (2a)111 = 2a * 3 * 37$.

$\frac{n(n+1)}{2} = a * 111 = 3a * 37$, следовательно, $a = 6$ и следовательно, необходимо всзять 36 слагаемых.

Ответ: 36.

2. Часы показывают 3 часа. Какова будет величина угла между стрелками через 30 минут?

Ответ: 75^0.

3. Известно, что секция по самбо проходит по средам и пятницам, а секция каратэ по вторникам и четвергам. Какой день недели было 1 января, если в январе Вовочка был на тренировках 8 раз (не пропуская ни одного занятия!).

Ответ: 1 января - суббота.

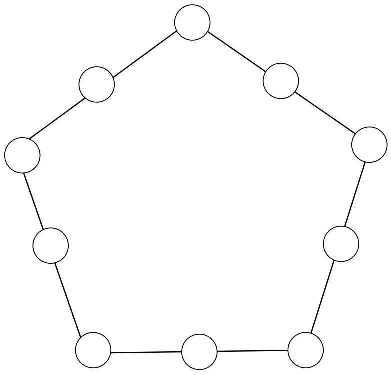
4. Вишенка на квадратном торте оказалась не в центре. Нехнайка разрезал торт на несколько прямоугольных кусков и переставил их так, что вишенка оказалась в центре торта. На какое наименьшее числокусков разрел торт Незнайка?

Решение. Рассмотри кватратный торт $ABCD$, со стороной 1 для определенности. Поместим начало декартовой системы координат в точку A. Пусть точка M имеет координаты (x, y) причем $x, y > \frac{1}{2}$. (Если $y = \frac{1}{2}$, то 1 разрез не нужен.)

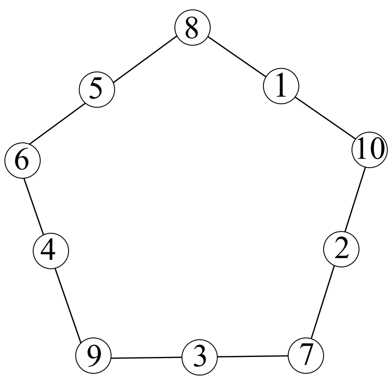
Сделаем разрез KN параллельно AB на расстоянии $\frac{1}{2}$ от точки M. Второй разрез PQ проведем на расстоянии $\frac{1}{2}$ от точки M параллельно AD до KN. Получим 3 куска: 1 кусок -$AKNB$, 2 кусок - $KDPQ$, 3 кусок - $QPCN$. Переставим куски 2 и 3 местами, а кусок 1 надставим на них. Так как куски должны быть прямоугольные, то нужно по крайней мере 2 разреза: один прямолинейный разрез может проходить через $\frac{1}{2}$ либо по оси x либо по оси y, но не оба сразу.

Ответ: 3 куска.

5. Расставьте 10 натуральных чисел от 1 до 10 в кружочки так, чтобы сумма чисел на каждой стороне пятиугольника была бы одной и той же.



Ответ.



6.В доме 10 этажей, во сколько раз лестница на 10 этаж длинее, чем

а) на 5 этаж;

б) на 2 этаж.

Ответ:

▷ **7.** Если от задуманного трехзначного числа отнять 8, то полученное число будет делиться на 7, если от задуманного числа отнять 17, то оно будет делиться на 8, если от задуманного числа отнять 28, то оно будет делиться на 9. Определите это число.

Ответ:

8. Два математика работали над одной и той же проблемой. Известно, что (полный) год рождения одного из них на 4% больше года рождения другого. Могло ли случиться так, что оба этих математика родились во времена существования Советского Союза? Ответ обосновать. Советский Союз (1922-1991гг.) (*Л. Штейнгарц*)

Решение. Пусть год рождения более молодого математика x, а другого y. Тогда по условию

$$y = \frac{26x}{25}.$$

Отсюда следует, что число x должно делится на 25. Среди возможных годов на 25 делятся лишь такие:

$$1900, 1925, 1950, 1975, 2000.$$

Проверкой убеждаемся, что все эти варианты не удовлетворяют условию задачи.

Ответ:Не могло.

9. Ни одно из указанных чисел не делится на 10 и все эти числа дают при делении на 10 разные остатки. Сумма этих чисел делится на 10. Найдите все указанные остатки от деления. *С.В. Дворянинов*

Решение. Добавим недостающий остаток. Получим числа от 1 до 9, сумма которых равна 45. Это число на 10 не делится. Какое число (от 1 до 9) следует вычесть, чтобы результат делился на 10? Единственный вариант - число 5. Следовательно, число 5 и было добавлено ко всем восьми остаткам.

Ответ: Остатки - все натуральные числа от 1 до 9 кроме числа 5.

10. Из прямоугольника 12×9 от угла отрезали прямоугольник 8×1 так, что большая сторона отрезаемого прямоугольника параллельна меньшей стороне исходного прямоугольника. Как разрезать на 3 части оставшийся кусок, чтобы из него можно было сложить прямоугольник.

Ответ:

XXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2013»

7 класс

1. Представьте число 2013 в виде суммы нескольких положительных слагаемых так, чтобы произведение этих слагаемых тоже равнялось 2013.

Решение. $2013 = 3 * 11 * 61$. $2013 = 3 + 11 + 61 + 1 + ... + 1$. В сумме участвует 1938 единиц.

2. Какой угол образуют часовая и минутная стрелки часов через 2013 минут после полуночи?

Решение. 2013 минут - это 33 полных часа и 33 минуты. Следовательно, через 2013 минут часы будут показывать 9 часов 33 минуты. В 9 часов 30 минут угол между стрелками

$$90^0 + \frac{1}{2}30^0 = 105^0.$$

Через 3 минуты минутная стрелка пройдет $\frac{3}{5}30^0 = 18^0$, а часовая в 12 раз меньше: $\frac{18^0}{12} = 1,5^0$.

Значит, угол составит $105^0 - 18^0 + 1,5^0 = 87^0 + 1,5^0 = 88,5^0$.

Ответ: $88,5^0$.

3. Вишенка на квадратном торте оказалась не в центре. Незнайка разрезал торт на несколько прямоугольных кусков и переставил их так, что вишенка оказалась в центре торта. На какое наименьшее число кусков разрезал торт Незнайка?

Ответ: 3 куска. (см)

4. Расшифруйте ребус

$$\text{А·Р=И-Ф=М:Е=Т-И=К:А.}$$

Ответ:

5. На луче AB отмечены такие точки $A_1, A_2, A_3, ...$, что $AA_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 = 3$, ... Перечислите отрезки с концами в отмеченных точках, чтобы длина каждого такого отрезка равнялась 63. Укажите пары непересекающихся отрезков, расстояние между серединами которых равно 20.

Ответ: A_2A_{11}, A_5A_{12}, A_7A_{13}, $A_{19}A_{22}$, $A_{30}A_{32}$, $A_{62}A_{63}$. Пары отрезков: A_2A_3 и

$$A_6A_7,$$

A_8A_9 и

$$A_{10}A_{11},$$

6. Натуральное число n назовем разбиваемым, если числа $1, 2, 3, ..., n$ можно разбить на такие группы, что наименьшее число в каждой группе равно количеству чисел в этой группе. Докажите, что число 33 разбиваемо. *(С.В. Дворянинов)*

$$1$$

$$2, 3$$

$$4, 9, 21, 22$$

$$5, 10, 14, 23, 24$$

$$6, 11, 15, 18, 25, 26$$

$$7, 12, 16, 19, 27, 29, 30$$

$$8, 13, 17, 20, 28, 31, 32, 33$$

Ответ: Число 33 разбиваемо.

7. В группе студентов - либо мальчик, либо брюнет, либо любит рок музыку. В группе 20 мальчиков, из них 13 брюнеты и один любит рок музыку. Всего в группе 25 мальчиков-брюнетов, рок музыку из них любят 14, а всего студентов (мальчиков и девочек), которые любят рок музыку, 17, из них 6 мальчики. Сколько студентов в данной группе?

Решение. 20+25+17-(13+14+6)+1=30.

Ответ: 30.

8. Найти все четырехзначные числа, которые будучи приписаны справа к числу 400 можно представить в виде произведения двух одинаковых сомножите-лей.

Ответ:

9. Известно, что в январе — четыре понедельника и четыре пятницы. Какой день недели приходится на 1 января?

Ответ:

10. Имеются гири в количестве 6 штук. Показать, что они могут быть подобраны так, что с помощью них можно взвесить на обыкновенных весах любой вес в целых килограммах от 1 кг до 364 кг.

Ответ: Гири весами: 1; 3; 9; 27; 81; 243.

XXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2013»
8 класс

$\triangleright$ **1.** Докажите, что уравнение

$$C^A + M^A = P^A,$$

где C, M, A, P различные четные натуральные числа, имеет бесконечно много решений.

Решение. Известно, что

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Пусть x — произвольное натуральное четное число. Тогда положив

$$C = 3x, M = 4x, P = 5x, A = 2,$$

тогда получим

$$(3x)^2 + (4x)^2 = (5x)^2.$$

Это равенство означает, что исходное уравнение имеет бесконечно много решений при условии, что числа C, M, A, P — различные четные натуральные числа.

2. Натуральное число n назовем разбиваемым, если числа $1, 2, 3, ..., n$ можно разбить на такие группы, что наименьшее число в каждой группе равно количеству чисел в этой группе. Докажите, что число 2013 разбиваемо. *(Дворянинов С.В.)*

Решение.

$$1$$

$$2, 3$$

$$4, 2013, 2012, 2011$$

$$5, 2010, 2009, 2008, 2007$$

$$6, 2006, 2005, 2004, 2003, 2002$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$62, 83, 82, 81, 80, 79, 78, 77, ..., ..., 128, 127, 126$$

$$63, 125, 124, 123, 122, 121, 120, 119, ..., ..., 66, 65, 64, 62$$

3. Треугольник имеет целые длины сторон x, y, z, причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других его высот. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2$ — квадрат целого числа.

Решение. Пусть z — наименьшая из сторон треугольника ABC, S — его площадь. Тогда

$$\frac{2S}{z} = \frac{2S}{x} + \frac{2S}{y},$$

т.е. $xy - xz - yz = 0$. Но при выполнении этого условия получаем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y - z)^2,$$

т.е. является квадратом целого числа.

$\triangleright$ **4.** На доске выписаны 100 последовательных натуральных чисел. Когда ученик Петров стер два из них, то сумма оставшихся оказалась равной восьми-значному числу 20122013. Найдите

а) первое число из указанной последовательности;

б) Сколько существует таких пар чисел, которые можно убрать согласно условию задачи?

5. Внутри квадрата, но не в центре находятся 2 точки. Разрежьте квадрат на наименьшее число прямоугольников и переместите их так, чтобы обе точки оказались в центре квадрата.

Решение. Поскольку точки должны совпасть, то 2 разреза должны пройти через них. Для каждой точки еще по одному разрезу нужно чтобы после перекладывания обе точки оказались на вертикальной оси симметрии квадрата, получаем окончательные куски 1, 2,3 и 4.

Еще один разрез необходим, чтобы совместить точки. Итого 5 разрезов, как минимум 6 кусков. Разрежем квадрат прямоугольным разрезом пополам, получим куски 5 и 6. Повернем их на 180^0 и задача решена.

Ответ: 6 кусков

6. Ни одно из 98 натуральных чисел не делится на 100 и все эти числа дают при делении на 100 разные остатки. Сумма этих чисел делится на 100. Найдите все указанные остатки от деления. *(С.В. Дворянинов)*

Решение. Добавим недостающий остаток. Получим числа от 1 до 99, сумма которых равна 4950. Это число не делится на 100. Какое число (от 1 до 99) следует вычесть, чтобы результат делился на 100? Единственный вариант - число 50. Следовательно, число 50 и было добавлено ко всем 98 остаткам.

Ответ: Остатки - все натуральные числа от 1 до 99 кроме числа 50.

7. На экскурсии были семиклассники и восьмиклассники. Все они были либо с фотоаппаратами, либо с видеокамерами. Мальчиков было 16, а ребят с фотоаппаратами 24. Девочек с видеокамерами было ровно столько, сколько мальчиков с фотоаппаратами. Сколько учащихся было на экскурсии?

Ответ: 40.

8.5. Какое наименьшее значения может принимать c, если

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=1. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases} a+b=1-c \\ a^2+b^2=1-c^2. \end{cases}$$

$a^2+2ab+b^2=1-2c+c^2$
$2ab=2c^2-2c$

$$\begin{cases} ab=c^2-c \\ a+b=1-c \end{cases}$$

$t^2-(1-c)t+c^2-c=0$
$t=\frac{1-c\pm\sqrt{1-2c+c^2-4c^2+4c}}{2}$
$t=\frac{1-c\pm\sqrt{1+2c-3c^2}}{2}$
$3c^2-2c-1\le 0$
$-\frac{1}{3}\le c\le 1$
$c=-\frac{1}{3}$
$a=b=\frac{2}{3}$
$(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-\frac{1}{3})$.
Ответ:

9. Известно, что площадь правильного треугольника со стороной a равна $\frac{a^3}{4R}$, где R— радиус описанной окружности. Пусть площадь некоторого треугольника равна $\frac{x^3}{4R}$, где R — радиус описанной окружности, x — длина одной из его сторон. Следует ли отсюда, что этот треугольник правильный? *С.В. Дворянинов*

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник со сторонами $2<\sqrt{2+2\sqrt{5}}<1+\sqrt{5}, x=\sqrt{2+2\sqrt{5}}$.

Ответ: Нет.

10. Сколько решений в целых числах имеет решение

$$20x^2+13y^2=2013?$$

Решение.
1. $x^2=100, y^2=1, x=+-10, y=+-1$.
2. $x^2=87, y^2=21$, решений нет.
3. $x^2=74, y^2=41$, решений нет.
4. $x^2=61, y^2=61$, решений нет.
5. $x^2=48, y^2=81$, решений нет.
6. $x^2=35, y^2=101$, решений нет.
7. $x^2=22, y^2=121$, решений нет.
8. $x^2=9, y^2=141$, решений нет.

Ответ:4.

XXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2013»

9 класс

$\triangleright$ **1.** Сколько решений имеет уравнение

$$C^A + M^A = P^A,$$

если A, M, P, C — различные цифры.

Решение. Известно, что

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Пусть x — произвольное натуральное четное число. Тогда положив

$$C = 3x, M = 4x, P = 5x, A = 2,$$

тогда получим

$$(3x)^2 + (4x)^2 = (5x)^2.$$

Это равенство означает, что исходное уравнение имеет бесконечно много решений при условии, что числа C, M, A, P — различные четные натуральные числа.

2. Можно ли разрезать квадрат на 2013 равнобедренных трапеций.

Решение. Разбиваем квадрат на 4 равнобедренные трапеции и 4 равнобедренных треугольника.

$$2013 - 4 = 2009,$$

$$2009 = 502 + 502 + 502 + 503.$$

Каждый треугольник разбиваем на необходимое число трапеции линиями параллельными основанию треугольника и на три равнобедренные трапеции.

$$502 = 499 + 3, 503 = 500 + 3.$$

Ответ: Можно

3. Пусть a, b, c положительные действительные числа. Найдите наименьшее значение суммы

$$\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c}.$$

Решение. Пусть $\begin{cases} x = a + 2b + c, \\ y = a + b + 2c, \\ z = a + b + 3c. \end{cases}$ Легко увитедь, что $z - y = c$, $x - y = b - c$, тогда можно получить: $x - y = b - (z - y)$ или $b = x + z - 2y$. Заметим также, что $a + 3c = 2y - x$. Подставляя полученные замены в исходное выражение получаем:

$$\frac{a+3c}{a+2b+c} + \frac{4b}{a+b+2c} - \frac{8c}{a+b+3c} =$$

$$= \frac{2y-x}{x} + \frac{4(x+z-2y)}{y} - \frac{8(z-y)}{z} \geq$$

$$\geq -17 + 2\sqrt{8} + 2\sqrt{32} = -17 + 12\sqrt{2}.$$

Данное неравенство получается, если заметить, что $\frac{2y}{x} = \frac{4x}{y}$ и $\frac{4z}{y} = \frac{8y}{z}$. Тогда $4x^2 = 2y^2 = z^2$ и

$$\begin{cases} a + b + 2c = \sqrt{2}(a + 2b + c), \\ a + b + 3c = 2(a + 2b + c). \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = (1 + \sqrt{2})a, \\ c = (4 + 3\sqrt{2})a. \end{cases}$$

Ответ: $-17 + 12\sqrt{2}$.

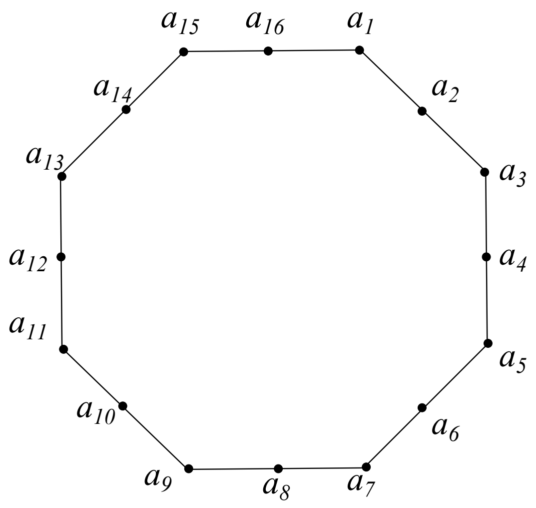
$\triangleright$ **4.** Радиус вписанной в треугольник окружности, стороны которого натураль-ные числа, равен 1. Чему равен наибольший угол этого треугольника?

Указание. Длины сторон:3,4,5.

Ответ: 90^0.

$\triangleright$ **5.** Можно ли расставить 14 подряд идущих натуральных чисел в вершинах и серединах сторон правильного семиугольника так, чтобы сумма трех чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была бы для всех сторон одинаковой?

Решение.
$a_1 + a_2 + \ldots + a_{16} = 16m + 17 \cdot 8 = 16m + 136$
$a_2 + \ldots + a_{16} = 8m + 16 \cdot 4$
$8l = a_1 + a_2 + a_3 + a_3 + a_4 + a_5 + a_5 + a_6 + a_7 + a_7 + a_8 + a_9 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{11} + a_{12} + a_{13} + a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{15} + a_{16} + a_1 == 2(a_1 + a_2 + \ldots + a + 16) - (a_2 + a_4 + \ldots + a_{16})$
$8l = 32m + 2 \cdot 136 - 8m - 16 \cdot 4$
$l = 3m + 26$



$\triangleright$ **6.** Известно, что $\forall x \in R$ $f(x+2) + af(x) = f(x+1)$ и $f(3) = 2013$. Чему равно $f(2013)$, если $a = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Решение.

$$f(x+2) = f(x+1) - af(x),$$
$$f(x+3) = f(x+2) - af(x+1) = f(x+1) - af(x) - af(x+1) = (1-a)f(x+1) - af(x),$$
$$f(x+4) = (1-2a)f(x+1) - (a+a^2)f(x),$$
$$f(x+5) = (1-3a+a^2)f(x+1) - af(x) = -af(x),$$
$$f(x+10) = -af(x+5) = a^2 f(x),$$
$$f(x+20) = a^2 f(x+10) = (a^2)^2 f(x),$$
$$f(x+10 \cdot m) = (a^2)^m f(x),$$
$$2013 = 201 \cdot 10 + 3 \Longrightarrow (a^2)^{201} f(3).$$

Ответ: $f(2013) = 2013 \cdot ((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^2)^{201}$.
7. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$\begin{cases} a+b+c+d = 2 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = 4 \end{cases}$$

Какие наибольшее и наименьшее значения может принимать d?
Решение.
$a^2 + b^2 + c^2 = 4 - d^2$
$a + b + c = 2 - d$
$a^2 + b^2 \geq 2ab$
$b^2 + c^2 \geq 2bc$
$c^2 + a^2 \geq 2ca$
$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 4 - 4d + d^2$
$ab + bc + ac = d^2 - 2d \leq 4 - d^2$
$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$
$2d^2 - 2d - 4 \leq 0$
$d^2 - d - 2 \leq 0$
$-1 \leq d \leq 2$
1) Наибольшее значение $d = 2$

$$\begin{cases} a+b+c = 0 \\ a^2+b^2+c^2 = 0 \end{cases}$$

$(0; 0; 0; 2)$
2) Наименьшее значение $d = -1$

$$\begin{cases} a+b+c = 3 \\ a^2+b^2+c^2 = 3 \end{cases}$$

$(1;1;1;-1)$

Ответ:

8. Докажите, что для любого натурального k существует единственная последовательность, состоящая из $(2k-1)$ члена, такая, что сумма квадратов первых k последовательных натуральных чисел равна сумме квадратов $(k-1)$ последних натуральных чисел.

Решение. Требуется доказать, что

$$(m+1)^2+(m+2)^2+...+(m+k)^2=(m+k+1)^2+(m+k+2)^2+...+(m+2k-1)^2.$$

$$km^2+k(k+1)m+\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=(k-1)m^2+3k(k-1)m+2k^2(k-1)+\frac{k(k-1)(2k-1)}{6},$$
$$m^2-(2k^2-4k)m+\frac{k}{6}[2k^2+3k+1-2k^2+3k-1]-2k^2(k-1)=0,$$
$$m^2-2(k^2-2k)m-2k^3+3k^2=0,$$
$$m=k^2-2k\pm(k^2-k),$$
$$m_1=2k^2-3k,\quad m_2=-k.$$

При $m=2k^2-3k$ получаем:

$$(2k^2-3k+1)^2+(2k^2-3k+2)^2+\ldots+(2k^2-2k)^2=(2k^2-2k+1)^2+\ldots+(2k^2-k-1)^2.$$

9.Одному из нескольких мальчиков разных возрастов 10 лет, что составляет $\frac{1}{5}$ возрастов всех мальчиков (включая и его). Сколько лет сейчас каждому мальчику, если старшему из них 13 лет и возрасты всех мальчиков, кроме десятилетнего, размещенные в возрастающем порядке, составляют арифмети-ческую прогрессию?

Ответ:

$\triangleright$ **10.** Найти все натуральные n при которых сумма

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)<20013.$$

Ответ:

XXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2013»

10 класс

1.В слове $CAMAPA$ заменили каждую букву некоторой цифрой так, что одинаковые буквы были заменены одинаковыми цифрами, а разные - разными. Таким образом получилось некоторое число. При этом оказалось, что выполняется следующее двойное неравенство

$$\sin(CA)^0 = \sin(MA)^0 = \cos(P + A)^0.$$

Найдите сумму цифр часла $CAMAPA$. Замечание. Выражения CA и MA означают соответствующие двузначные числа.(*Л. Штейнгарц*)

Решение. По условию $\sin(CA)^0 = \sin(MA)^0$, поэтому учитывая, что оба числа двузначные, возможно:

$$CA = MA, \qquad CA = 180 - MA.$$

Первый случай не удовлетворяет условию задачи, т.к. C, M различные цифры. Во втором варианте получаем, что $CA + MA = 180$. В этом случае тоже возможны два варианта.

1. $A = 0$. В этом случае $C = M = 9$, что не подходит.

2. $A = 5$, тогда $C + M = 17$. Возможно $C = 9, M = 8$ или $C = 8, M = 9$.

В обоих случаях, получаем, что

$$\cos(P + 5)^0 = \sin 85^0 = \sin(90^0 - 5^0) = \cos 5^0.$$

Это равенство возможно получить, только при $P = 0$. Следовательно, $CAMAPA = 958505$ или $CAMAPA = 859505$. В обоих случаях сумма цифр числа $CAMAPA$ равна 32.

Ответ: 32.

$\triangleright$ **2.** Найдите по крайней мере два различных натуральных решения уравнения

$$[\sqrt[3]{m}] + [\sqrt[3]{m+1}] + \ldots + [\sqrt[3]{n}] = 2013,$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Ответ: $m = 3,\ 399$.

3. Известно, что $\forall x \in \mathbb{R}\ 3f(x+2) + f(x) = 3f(x+1)$ и $f(3) = 3^{1000}$. Найдите $f(2013)$.

Решение.

$f(x+2) = f(x+1) - \frac{1}{3}f(x)$

$f(x+3) = f(x+2) - \frac{1}{3}f(x+1) = f(x+1) - \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3}f(x+1) = \frac{2}{3}f(x+1) - \frac{1}{3}f(x)$

$f(x+4) = f(x+3) - \frac{1}{3}f(x+2) = \frac{2}{3}f(x+1) - \frac{1}{3}f(x) - \frac{1}{3}f(x+1) + \frac{1}{9}f(x) = \frac{1}{3}f(x+1) - \frac{2}{9}f(x)$

$f(x+5) = f(x+4) - \frac{1}{3}f(x+3) = \frac{1}{3}f(x+1) - \frac{2}{9}f(x) - \frac{2}{9}f(x+1) + \frac{1}{9}f(x) = \frac{1}{9}f(x+1) - \frac{1}{9}f(x)$

$f(x+6) = \frac{1}{9}f(x+1) - \frac{1}{9}f(x) - \frac{1}{9}f(x+1) + \frac{2}{27}f(x) = -\frac{1}{27}f(x)$

$f(a+6n) = \left(-\frac{1}{27}\right)^n f(a) \Rightarrow f(2013) = \left(-\frac{1}{27}\right)^{335} f(3)$, $6n + 3 = 2013$, $n = 335$.

$f(x+6) = -\frac{1}{27}f(x)$

$f(2013) = \left(-\frac{1}{27}\right)^{335} f(3) = -\frac{1}{3^{1005}}3^{1000} = -\frac{1}{3^5} = -\frac{1}{243}$

Ответ: $-\frac{1}{243}$.

4. Можно ли расставить 18 подряд идущих натуральных чисел в вершинах и серединах сторон правильного девятиугольника так, чтобы сумма трех чисел, стоящих в концах и середине каждой стороны, была бы для всех сторон одинаковой?

Решение.

$m+1, \ldots, m+18$

$(m+1) + (m+2) + \ldots + (m+17) + (m+18) = 18m + 19 \cdot 9 = 9(2m+19)$

$m+1, \ldots, m+9$

$(m+1) + (m+2) + \ldots + (m+8) + (m+9) = 9m + 5 \cdot 9$

$9l = 2[9(2m+19)] - 9m - 5 \cdot 9 = 9[4m + 38 - 5m] = 9[3m+33]$

$l = 3m + 33$

$a_1 = 3m + 33 - 2m - 19 = m + 14$

$a_{17} = l - (2m+23) = m + 10$

$a_{15} = l - (2m+18) = m + 15$

$a_1 = m + 14$

$a_2 = m + 1$

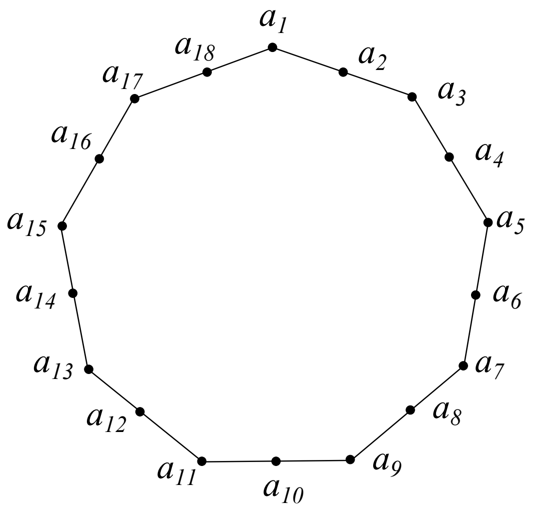
$a_3 = m + 18$

$a_4 = m + 2$

$a_5 = m + 13$

$a_6 = m + 3$

$a_7 = m + 17$



$a_8 = m + 4$
$a_9 = m + 12$
$a_{10} = m + 5$
$a_{11} = m + 16$
$a_{12} = m + 6$
$a_{13} = m + 11$
$a_{14} = m + 7$
$a_{15} = m + 15$
$a_{16} = m + 8$
$a_{17} = m + 10$
$a_{18} = m + 9$

5. $\triangleright$ **5.** Из множества всех трехзначных чисел состовляются последовательности, подряд идущих чисел и число членов в этих последовательностях нечетное.

а) Сколько различных таких последовательностей можно составить?

б) Сколько последовательностей удовлетворяет условию: сумма квадратов k первых членов совпадает с суммой квадратов $k-1$ последних членов?

Ответ:

6. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$\begin{cases} a+b+c+d=8 \\ a^2+b^2+c^2+d^2=19 \end{cases}$$

Какие наибольшее и наименьшее значения может принимать d?

Решение.

$a^2+b^2+c^2=19-d^2$
$a+b+c=8-d$
$a^2+b^2 \geq 2ab$
$b^2+c^2 \geq 2bc$
$c^2+a^2 \geq 2ca$
$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=(8-d)^2$
$2ab+2bc+2ac=2d^2-16d+45 \leq 38-2d^2$
$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$
$4d^2-16d+7 \leq 0$
$\frac{1}{2} \leq d \leq \frac{7}{2}$

1) Наибольшее значение $d=\frac{7}{2}$

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{9}{2} \\ a^2+b^2+c^2=\frac{7}{4} \end{cases}$$

$(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{7}{2})$

2) Наименьшее значение $d=\frac{1}{2}$

$$\begin{cases} a+b+c=\frac{15}{2} \\ a^2+b^2+c^2=\frac{75}{4} \end{cases}$$

$(\frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{5}{2}; \frac{1}{2})$

Ответ:

7. Дан правильный шестиугольник, сторона которого равна 1. С помощью только линейки (без делений) построить отрезок $\sqrt{21}$.

Указание.

8. Из многоугольника можно получить новый многоугольник с помощью следующих операций: разрезав его по отрезку на 2 части, одну из частей перевернуть и приставить к другой части по линии разреза, если при этом части не будут иметь общих точек разреза. Можно ли с помощью нескольких таких операций из квадрата получить треугольник?

Решение. Заметим, что при указанных в условии операциях не меняется ни периметр, ни площадь многоугольника. Докажем, что площадь треугольника периметра $2p$ меньше площади квадрата того же периметра. Площадь квадрата равна $\frac{p^2}{4}$. Площадь треугольника, равную по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

можно оценить с помощью неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\sqrt{S} = \sqrt[4]{p(p-a)(p-b)(p-c)} < \frac{p+p-a+p-b+p-c}{4} = \frac{p}{2},$$

откуда $S <= \frac{p^2}{4}$. (В неравенстве знак $<$, а не $<=$, так как p, $p-a$, $p-b$, $p-c$ не могут быть равными.)

Ответ: нельзя.

9. Найдите сумму целых частей всех корней уравнения

$$(-1)^{[x^2]}x^2 + (-1)^{[4x]}(4x+1) = 0.$$

Решение.

$\triangleright$ **10.** Можно ли разрезать квадрат на

а) 2013 равнобедренных трапеций;

б) 13 равнобедренных трапеций.

Решение. а) Разбиваем квадрат на 4 равнобедренные трапеции и 4 равнобедренных треугольника.

$$2013 - 4 = 2009,$$

$$2009 = 502 + 502 + 502 + 503.$$

Каждый треугольник разбиваем на необходимое число трапеции линиями параллельными основанию треугольника и на три равнобедренные трапеции.

$$502 = 499 + 3, 503 = 500 + 3.$$

б) Разбиваем квадрат на 4 равнобедренные трапеции и 4 равнобедренных треугольника. Каждый из треугольников минимум разбивается на 3 равнобедренных трапеции. Следовательно, минимальное число равнобедренных трапеций - 16.

Ответ: а) Можно. б) Нельзя.

XXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2013»

11 класс

1. В первом туре олимпиады САММАТ 2013 школьников прошли во второй тур (т.е. решили не менее пяти задач из десяти). Докажите, что среди них всегда найдутся четверо школьников, которые решили одни и те же задачи.

Решение.

10 задач.

$$N_5 = C_{10}^5 = \frac{10!}{5!5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 252$$

$$N_6 = C_{10}^6 = \frac{10!}{6!4!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4} = 210$$

$$N_7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3} = 120$$

$$N_8 = C_{10}^8 = \frac{10!}{8!2!} = \frac{9\cdot 10}{2} = 45$$

$$N_9 = C_{10}^9 = 10$$

$$N_{10} = C_{10}^{10} = 1$$

Всего случаев 638.

От противного: $N \le 3\cdot 638 = 1914$.

Ответ:

2. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_{2012}$ удовлетворяют равенству

$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \ldots + (x_{2011}-x_{2012})^2 + x_{2012}^2 = \frac{1}{2013}.$$

Чему равно $x_1 - x_{2012}$?

Решение.

$$2ab \le a^2+b^2 \quad \text{для} \quad \forall a,b; \qquad 2ab < a^2+b^2 \quad \forall a\ne b.$$

Лемма.

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \Rightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n.$

Пусть $a_1 \ne a_2$, тогда $2a_1a_2 < a_1^2 + a_2^2$;

$2a_{ij} \le a_i^2 + a_j^2$, $1 \le i < j \le n$

$2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n < (n-1)^2\left[a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right]$

$(a_1 + \ldots + a_n)^2 < n(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$

$\Downarrow$

$a_1^2 + \ldots + a_n^2 > \frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n)^2$ — противоречие!

$a_1 = 1 - x_1, \quad a_k = x_{k-1} - x_k, \quad a_{2013} = x_{2012}$

$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 - x_1 = x_1 - x_2 = \ldots = x_{2011} - x_{2012} = x_{2012}$

$x_{2011} = 2x_{2012}$

$x_{2010} = 2x_{2011} - x_{2012} = 3x_{2012}$

$x_{1999} = 4x_{2012}$

$\ldots$

$x_i = (2013 - i)x_{2012}$

$\ldots$

$x_1 = 2012x_{2012}$

$1 - x_1 = x_1 - x_2$

$x_1 = \frac{1+x_2}{2}$

$$\begin{cases} x_1 + x_{2012} = 1 \\ x_1 = 2012x_{2012} \end{cases}$$

$x_{2012} = \frac{1}{2013}$

$x_1 = \frac{2012}{2013}$
$x_1 - x_{2012} = \frac{2011}{2013}$.
Ответ:

3. Два одинаковых куба с ребром a имеют общую диагональ, но один повернут вокруг этой диагонали на $60°$ по отношению к другому. Найти объем их общей части.

Решение.

Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сечения AD_1C и A_1BC_1 представляют равносторонние треугольники, их плоскости параллельны, т.к. попарно параллельны прямые, на которых лежат отрезки, составляющие стороны этих треугольников. Если провести плоскость, параллельную этим сечениям и находящуюся на равном расстоянии от них, то получится еще одно сечение куба, которое представляет собой шестиугольник. Каждая его сторона равна половине диагонали грани куба ($\frac{a\sqrt{2}}{2}$), так как соединяет середины двух смежных ребер. Стороны данного шестиугольника параллельны соответствующим прямым, образующим сечения AD_1C и A_1BC_1, а следовательно - попарно параллельны. Поэтому полученный шестиугольник правильный. Его площадь равна $S = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Пусть вращение происходит вокруг диагонали B_1D. Общая часть двух кубов представляет собой две правильные шестиугольные пирамиды, сложенные вместе основаниями, вершины которых находятся в точках B_1 и D. Основание — рассмотренный выше правильный шестиугольник. Высота каждой пирамиды равна половине главной диагонали куба и равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Поэтому объем общей части $V = 2\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\frac{3\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{3}{4}a^3$.

Рассмотрим шар, вписанный в исходный куб. Он касается 6 граней куба и имеет радиус $\frac{a}{2}$. Центр шара совпадает с центром куба. Повернем шар вместе с кубом на $60°$. Очевидно, он перейдет сам в себя (т.к. ось вращения проходит через его центр). Получили шар, касающийся всех граней исходного куба и одновременно — всех граней куба, повернутого на $60°$ (в центрах граней). Поскольку грани общей части есть участки граней куба, содержащие точки касания, данный шар вписан в полученный многогранник.

4. При каком наименьшем n выполняется неравенство

$$log_2^n 3 \cdot log_3^n 4 \cdot ... \cdot log_{n-1}^n n \cdot log_n^n (n+1) > 2013?$$

Решение. Перейдем к основанию 2:

$$log_2^n 3 \cdot \frac{log_2^n 4}{log_2^n 3} \cdot ... \cdot \frac{log_2^n n}{log_2^n (n-1)} \cdot \frac{log_2^n (n+1)}{log_2^n n} > 2013,$$

$$log_2^n (n+1) > 2013,$$

$$log_2 (n+1) > \sqrt[n]{2013},$$

$$n+1 > 2^{\sqrt[n]{2013}}.$$

При $n = 7$.
Ответ: 7.

5. Пусть задана последовательность $a_n : a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1, a_1 = 2$. Вычислить $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_{100}}$ с точностью до 20 знаков после запятой. Какая цифра стоит на 13 месте?
Ответ:

6. Для некоторых функций $f(x)$ и $g(x)$ при всех x верно

$$\begin{cases} f(x) = g(x+1)g(x-1), \\ g(x) = f(x+1)f(x-1), \end{cases}$$

причем $f(3) + g((9) = 2013$. Чему равно $f(2013) + g(2013)$?

Решение.

$$f(x) = f(x+2)f(x)f(x)f(x-2), \quad f(x) \neq 0,$$

$$f(x)f(x+2)\underline{f(x-2)} = 1,$$

$$f(x+2)\underline{f(x+4)}f(x) = 1, \Rightarrow f(x+4) = f(x-2), \forall x.$$

$$f(x+6) = f(x).$$

Следовательно, функция $f(x)$ периодическая с периодом $T = 6$. Аналогично доказывается, что функция $g(x)$ периодическая с периодом $T = 6$. Имеем, $f(2013) = f(3)$, $g(2013) = g(9)$. Получаем, $f(2013) + g(2013) = 2013$.
Ответ: 2013.

7. Дан $\triangle ABC$, площадь которого равна 2013. На сторонах AB и AC взяты точки D и E соответственно. На отрезке DE взята точка F. Найти чему равно выражение $\sqrt[3]{S_{BDF}} + \sqrt[3]{S_{CEF}}$, если точки D, E, F выбраны так, что $\frac{AD}{AB} = \frac{EC}{AC} = \frac{EF}{DE}$.

Решение. Пусть $\frac{AD}{AB} = x$, $\frac{AE}{AC} = y$, $\frac{DF}{DE} = z$.
Тогда $S_{BDF} = (1-x)yzS_{ABC}$, $S_{CFE} = x(1-y)S_{ABC}$.
$S_{BDF} = zS_{BDF} = z(1-x)S_{ABC} = z(1-x)yS_{ABC}$.
$S_{CEF} = (1-z)S_{CDE} = (1-z)(1-y)S_{ACD} = (1-z)(1-y)xS_{ABC}$.

$$\sqrt[3]{S_{BDF}}+\sqrt[3]{S_{CEF}}=[\sqrt[3]{zy(1-x)}+\sqrt[3]{x(1-y)(1-z)}]\sqrt[3]{S_{ABC}}\leq$$
$$\leq(\frac{z+y+1-x+x+1-y+1-z}{3})\sqrt[3]{S_{ABC}}=\sqrt[3]{S_{ABC}}.$$

Т.к.

$$y=z=1-x\Longrightarrow\sqrt[3]{S_{BDF}}+\sqrt[3]{S_{CEF}}=\sqrt[3]{S_{ABC}}.$$

Ответ: $\sqrt[3]{2013}$.

▷ **8.** Решите уравнение

$$[x^2]+\frac{1}{[x^2]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}},$$

где $[x]$ — целая часть числа x, $\{x\}$ — дробная часть числа x.

▷ **9.** Ни одно из $2n$ натуральных чисел не делится на $(2n+2)$ и все эти числа дают при делении на $(2n+2)$ разные остатки. Сумма этих чисел делится на $(2n+2)$. Найдите все указанные остатки от деления.

Решение. Добавим нелостающий остаток. Получим числа от 1 до $2n+1$, сумма которых равна $S=(n+1)(2n+1)$. Число S на $(2n+2)$ не делится. Какое число от 1 до $2n+1$ следует вычесть из S, чтобы результат делился на $2n+2$?

$S=(2n+2)n+(n+1)$. Ясно, что единственный вариант - вычесть число $n+1$.

Следовательно, число $(n+1)$ и было добавлено ко всем имеющимся остаткам.

Ответ: Остатки - все натуральные числа от 1 до $(2n+1)$, кроме числа $n+1$.

▷ **10.** ▷ **10.** Сколько решений уравнения

$$cos\frac{\pi}{1+\sqrt{x}}+cos\frac{\pi}{1+2x}=0$$

находится в $[-2013;2013]$.

Критерии оценки задач 6-11 классов:

Максимальное число баллов за задачу - 10 баллов.
8 баллов ставится за задачу, содержащую в решении вычислительную ошибку.
Если к задаче приведен только ответ, то такая задача оценивается в 2 балла.