XX Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2012»

Заключительный тур

6 класс

$\triangleright$ **1.** В магазин поступили 4 ящика с печеньем. Если из каждого ящика вынуть по $13,5$ кг, то во всех ящиках останется столько, сколько было в каждом. Сколько печенья было в каждом ящике?

$\triangleright$ **2.** Зайчик прыгает по прямой вперед и назад большими и малыми прыжками. Большой прыжок составляет 90 см, малый - 50 см. Покажите, как ему попасть из пункта A в пункт B, если расстояние между пунктами 2 м 60 см.

$\triangleright$ **3.** При сложении двух натуральных чисел Незнайка поставил лишний ноль на конце первого слагаемого и вместо 4022 получил сумму, равную 22112. Какие числа складывал Незнайка?

$\triangleright$ **4.** Найти наименьшее трехзначное число n, при котором все дроби

$$\frac{3}{n+2009}, \frac{4}{n+2010}, \frac{5}{n+2011}, \frac{6}{n+2012}$$

несократимы.

$\triangleright$ **5.** Двое по очереди ломают шоколадку фабрики «Россия» размером 3×6 (18 долей). За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления (но только одного). Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает?

$\triangleright$ **6.** Найти сумму площадей всех прямоугольников различных размеров (в том числе, и квадратов), состоящих из клеток шахматной доски, если сторона клетки равна 1 см.

$\triangleright$ **7.** Школьный звонок был сломан. Он начинал звенеть каждый раз, когда на электронных часах появлялась цифра 6, и звенел до тех пор, пока какая-нибудь шестерка была на циферблате часов. Сколько всего времени в течение суток звенел школьный звонок? (Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59.)

$\triangleright$ **8.** В оздоровительный лагерь приехали три друга: Миша, Володя, Петя. Известно, что каждый из них имеет одну из фамилий: Иванов, Семенов, Герасимов. Миша не Герасимов. Отец Володи бизнесмен. Володя учится в 6 классе. Мальчик с фамилией Герасимов учится в 5 классе. Отец мальчика с фамилией Иванов - хирург. Какая фамилия у каждого из друзей?

$\triangleright$ **9.** На прямой выбраны четыре точки A, B, C, D, причем $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Чему может быть равно AD? Укажите все возможные варианты.

$\triangleright$ **10.** Решите ребус КОРОВА+КОРОВА=МОЛОКО. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные.)

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XX Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2012»

Заключительный тур

7 класс

▷ **1.** Сколько стоят 1 кг лука, 2 кг картофеля и 2 кг огурцов вместе, если известно, что 0,5 кг лука, 3 кг картофеля и 1 кг огурцов стоят вместе 119 руб., а 2 кг лука и 4 кг огурцов стоят 410 руб.

▷ **2.** Найти наибольшее двузначное число n, при котором все дроби

$$\frac{3}{n+2009}, \frac{4}{n+2010}, \frac{5}{n+2011}, \frac{6}{n+2012}$$

несократимы.

▷ **3.** Имеется 10 ящиков. В некоторых из них лежат 10 ящиков меньшего размера, а в некоторых из меньших ящиков лежат еще по 10 ящиков. Сколько всего ящиков, если заполнено всего 54 ящика?

▷ **4.** На доске было написано число x с одним знаком после запятой, а под ним в столбик - числа $x+0,1$, $x+0,2$, $x+0,3$ и $x+0,4$. Незнайка стер все знаки после запятых и подсчитал сумму полученных чисел, которая оказалась равной 33. Найдите x.

▷ **5.** В банке лежат 2012 белых и черных зерен, из них 1000 белые. Наугад достаем два зерна. Если зерна одного цвета, то мы их выбрасываем, а в банку добавляем черное зерно, если зерна разного цвета, то черное выбрасываем, а белое кладем обратно. В конце концов осталось одно зерно. Какого оно цвета?

▷ **6.** Школьный звонок был сломан. Он начинал звенеть каждый раз, когда на электронных часах появлялась цифра 5, и звенел до тех пор, пока какая-нибудь пятерка была на циферблате часов. Сколько всего времени в течение суток звенел школьный звонок? (Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59.)

▷ **7.** Веселый молочник имеет 12 л молока и хочет подарить из него половину, но у него нет кувшина в 6 литров. У него два кувшина, один 8-и литровый, другой 5-и литровый. Спрашивается, каким образом налить 6 л в 8-и литровый кувшин.

▷ **8.** В треугольнике ABC проведена биссектриса BK и $\angle AKB : \angle CKB = 4:5$. Найдите разность углов A и C треугольника ABC.

▷ **9.** Лиса Алиса и кот Базилио делят 10 золотых монет по следующему правилу. Сначала Базилио делит все золотые на две кучки, в каждой не менее двух золотых. Потом Алиса делит каждую из этих кучек еще на две кучки. Из полученных четырех кучек наибольшая и наименьшая достаются Алисе, а две средние - Базилио. Кому сколько достанется?

▷ **10.** Расшифровать пример на деление

ЗАКОН:Н=УКАЗ.

Одним и тем же буквам соответствуют одинаковые цифры, разным - разные.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XX Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2012»

Заключительный тур

8 класс

▷ **1.** Купец, будучи должен 753 руб., попросил у того же заимодавца еще 303 руб. Последний согласился удовлетворить его просьбу на условии, чтобы весь долг был уплачен в течение 8 месяцев и притом так, чтобы должник, внеся к концу первого месяца некоторую сумму на покрытие части долга, ежемесячно увеличивал свой взнос на половину, т.е. уплатил бы во второй месяц полторы суммы таких суммы, в третий месяц две таких же суммы, в четвертый две с половиной и т.д. Обсудив эти условия, купец согласился на них. Спрашивается, какую сумму должен он внести в первый месяц и сколько в каждый из следующих месяцев.

▷ **2.** Имеется 199 литров молока в бутылках по 0,5, 0,7 и 1 литру. Доказать, что можно взять 50 литров молока, не вскрывая бутылок.

▷ **3.** Построить квадрат, равновеликий данному прямоугольнику.

▷ **4.** Три тюльпана и девять гвоздик стоят меньше 220 рублей, а 7 тюльпанов и 5 гвоздик - больше 240 рублей. Что дороже: 41 тюльпан или 53 гвоздики?

▷ **5.** Школьный звонок был сломан. Он начинал звенеть каждый раз, когда на электронных часах появлялась цифра 2, и звенел до тех пор, пока какая-нибудь двойка была на циферблате часов. Сколько всего времени в течение суток звенел школьный звонок? (Электронные часы показывают время от 00:00 до 23:59.)

▷ **6.** Двое по очереди ломают шоколадку фабрики «Россия» размером $m \times n$ ($m \cdot n$ долей). За один ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления (но только одного). Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто выигрывает?

▷ **7.** Вычислить:

$$\sqrt{1 + 2012^2 + \frac{2012^2}{2013^2}} + \frac{2012}{2013}.$$

▷ **8.** Найти все пятизначные числа $\overline{abcde}$, делящиеся на 36 и такие, что $a < b < c < d < e$.

▷ **9.** Турист выехал из турбазы на байдарке против течения в 10 ч 15 мин с обязательством вернуться обратно не позднее 13 часов того же дня. Известно, что скорость течения 1,4 км/ч, скорость байдарки в стоячей воде 3 км/ч. На какое максимальное расстояние турист может отплыть от турбазы, если через каждые 30 мин гребли он 15 мин отдыхает, не причаливая к берегу, и может повернуть назад только после отдыха.

▷ **10.** Зная, что $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{m}{n}$, найти $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XX Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2012»

Заключительный тур

9 класс

$\triangleright$ **1.** В железнодорожной будке на расстоянии 1 м от окна, ширина которого 1 м, сидит обходчик. На расстоянии 299 м от окна и параллельно плоскости окна проходит железнодорожный путь. Обходчик видит целиком поезд длиной 100 м, идущий по этому пути с постоянной скоростью в течение 10 сек. Определить скорость поезда. (Шириной поезда и расстоянием между глазами обходчика можно пренебречь.)

$\triangleright$ **2.** Имеются два равновеликих, не являющихся квадратами прямоугольника, у которых стороны измеряются целыми числами. У первого прямоугольника ширина равна 2011, а длина равна полупериметру второго прямоугольника. Найдите ширину (меньшую сторону) второго прямоугольника.

$\triangleright$ **3.** Последовательность a_n задана соотношением $a_{n+1} = \dfrac{1}{1-a_n}$. Найдите a_{2012}, если $a_1 = 3+\sqrt{7}$.

$\triangleright$ **4.** Ученик нарисовал треугольник с углами x, y, z, другой ученик нарисовал треугольник с углами $\sqrt{xy}$, $\sqrt{yz}$, $\sqrt{zx}$ градусов. Найдите x, y, z.

$\triangleright$ **5.** Дан произвольный треугольник. Построить с помощью циркуля и линейки квадрат, равновеликий данному треугольнику.

$\triangleright$ **6.** В классе присутствуют учитель и несколько учеников. Найти число учеников, если известно, что возраст учителя на 24 года больше среднего возраста учеников и на 20 лет больше среднего возраста всех присутствующих в классе.

$\triangleright$ **7.** 2012 чисел: $x_1, x_2, ..., x_{2012}$ записаны в строчку. Известно, что сумма любых трех соседних из них равна 200. Причем первое число 19, а последнее - 98. Найтиде остальные 2009 чисел.

$\triangleright$ **8.** Найти наибольшее значение величины $\dfrac{x}{3+y^2} + \dfrac{y}{3+x^2}$ при $0 \le x, y \le 1$.

$\triangleright$ **9.** Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$. Угол $BAC = 120^0$. Угол ABC больше угла ACB. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2. Найдите медиану треугольника ABC, проведенную из вершины B.

$\triangleright$ **10.** Зная, что $\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \dfrac{m}{n}$, найти $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{c+a}$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XX Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2012»

Заключительный тур

10 класс

▷ **1.** В коробке находятся 13 красных и 17 белых шаров. Разрешается проводить в любом порядке и любом количестве следующие операции:

1) увеличить на 2 число красных шаров и одновременно уменьшить на 1 число белых;
2) увеличить на 1 число красных шаров и одновременно увеличить на 2 число белых;
3) уменьшить на 2 число красных шаров и одновременно увеличить на 1 число белых;
4) уменьшить на 1 число красных шаров и одновременно уменьшить на 2 число белых.

Можно ли, совершая такие действия, добиться, чтобы в ящике было 1993 красных шара и 2012 белых шара?

▷ **2.** Ученик нарисовал треугольник с углами α, β, γ, другой ученик нарисовал треугольник с углами $\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $\dfrac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}$, $\dfrac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ градусов. Найдите α, β, γ.

▷ **3.** Диагональ AC квадрата $ABCD$ совпадает с гипотенузой прямоугольного треугольника ACK, причем точки B и K лежат по одну сторону от прямой AC. Докажите, что $BK = \dfrac{|AK-CK|}{\sqrt{2}}$ и $DK = \dfrac{AK+CK}{\sqrt{2}}$.

▷ **4.** Может ли среднее арифметическое 25 различных целых чисел равняться: а) 25,24; б) 25,25.

▷ **5.** Решите уравнение $\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\sqrt[3]{x^2\ldots}}} = 2012$.

▷ **6.** Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 108^0. Доказать, что высота треугольника, проведенная к основанию, составляет половину биссектрисы угла при основании.

▷ **7.** Число, кратное 35, в системе счисления с двузначным основанием записано в виде 1234. Найдите это число.

▷ **8.** Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{5+y^3}+\dfrac{y}{5+x^3}$ при $0 \le x, y \le 1$.

▷ **9.** Дана произвольная трапеция. С помощью циркуля и линейки найдите координаты центра тяжести данной трапеции.

▷ **10.** Жук ползет вверх по поверхности, вертикальное сечение, которой имеет форму параболы $y = \dfrac{1}{2}x^2$. За единицу времени жук поднимается на 8 см. Потом он отдыхает столько же времени и вследствие скольжения за время отдыха опускается на расстояние, численно равное крутизне (тангенсу угла наклона) параболы в момент начала отдыха. Определите координаты жука в конце девятой единицы времени от начала движения.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XX Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2012»

Заключительный тур

11 класс

$\triangleright$ **1.** Ученик нарисовал треугольник с углами $\sqrt{\alpha\beta}$, $\sqrt{\beta\gamma}$, $\sqrt{\alpha\gamma}$, другой ученик нарисовал треугольник с углами $\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}$, $\dfrac{2\beta\gamma}{\beta+\gamma}$, $\dfrac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$ градусов. Найдите α, β, γ.

$\triangleright$ **2.** Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y+z}=\frac{1}{m}, \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{x+z}=\frac{1}{n}, \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x+y}=\frac{1}{k}. \end{cases}$

$\triangleright$ **3.** Найдите все целые решения неравенства

$$2(x^2+x)\sin 2x+(2x+2-x^3)\cos 2x \leq x^3+2x+2.$$

$\triangleright$ **4.** Пусть x, y, z - корни уравнения $t^3-3t^2-2010t+2012=0$. Чему равно выражение $A=||x-y|+x+y-2z|+|x-y|+x+y+2z$.

$\triangleright$ **5.** Паук ползет поочередно по внешней и внутренней частям цилиндрической поверхности. Пусть M - точка из которой Паук начинает свое движение (см.обратную сторону, рис.1), R - радиус основания цилиндра, h - высота цилиндра. Найти наименьшее расстояние, которое должен проползти Паук, чтобы вернуться в точку M, если известно что на нижнем основании он побывал в 2012 различных точках.

$\triangleright$ **6.** На плоскости дано множество отрезков LR, где $L(-\dfrac{1}{\sqrt{p}};\dfrac{1}{p})$, $R(\sqrt{p};p)$ и параметр $p\in[0,25;4]$. Найдите площадь наименьшей фигуры, содержащей внутри себя все эти отрезки.

$\triangleright$ **7.** Найти наибольшее значение выражения $\dfrac{x}{4023+y^{2011}}+\dfrac{y}{4023+x^{2011}}$ при $x, y\in[0;1]$.

$\triangleright$ **8.** В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a, b. Эта призма рассечена плоскостью так, что в сечении получился равносторонний треугольник. Определить сторону этого треугольника.

$\triangleright$ **9.** С помощью циркуля и линейки по заданному периметру и углу α построить треугольник, равновеликий данному квадрату.

$\triangleright$ **10.** Куб без полостей составлен из трех равновеликих частей. Четыре боковые грани куба имеют вид (см. обратная сторона, рис.2). Видимая часть боковой грани среднего тела – невыпуклый шестиугольник. Найдите все возможные значения радиуса цилиндрического отверстия, перпендикулярного верхней и нижней граням куба, не задевающего среднего тела. Известно, что $AB=a$, $PP_1=QQ_1=\frac{3}{8}a$, $NN_1=\frac{4}{7}a$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!