XVII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ «САММАТ – 2009»

7 класс

1.03.2009

▷ **1.** Существуют ли различные нечетные натуральные m, n, p такие, что выполняется

$$\frac{1}{2009} = \frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m}.$$

▷ **2.** Расшифруйте запись

АБ·ВГ=БББ.

▷ **3.** Двое играют в игру. На клетчатой полосе 1×11 закрашивают по очереди две соседние клетки (не закрашенные предыдущими ходами). Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает?

▷ **4.** Доказать, что если в треугольнике величина каждого из углов больше $57°$, то она меньше $66°$.

▷ **5.** В справочнике из 7-и томов общая (сплошная) нумерация страниц. Сколько страниц в одном томе, если в каждом томе их поровну, а сумма номеров всех первых и последних страниц всех томов равна 2016.

▷ **6.** 100 апельсинов стоят столько же дукатов, сколько их можно купить за 1 дукат. Сколько апельсинов можно купить на 5 дукатов?

▷ **7.** Вася сказал, что ему больше 14 лет, а его сестра утверждает, что ему больше 13 лет. Сколько лет Васе, если известно, что одно утверждение ложно, а другое истино?

▷ **8.** В прямоугольной таблице расставлены натуральные числа так, что сумма чисел, в каждой строке равна 49, а сумма чисел, в каждом столбце равна 41. Какова наименьшая возможная сумма всех чисел вписанных в таблицу? Сколько строк и столбцов в таблице?

▷ **9.** Расстояние между двумя автомобилями 180 км. Скорость первого автомобиля 40 км/ч, второго — 50 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 3 часа?

▷ **10.** Нумеруют пальцы левой руки, начиная с большого пальца следующим образом: большой — 1, указательный — 2, средний — 3, безымянный — 4, мизинец — 5, безымянный — 6, средний — 7, указательный — 8, большой — 9, указательный — 10 и так далее. Какой палец будет иметь номер 2009?

XVII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ «САММАТ – 2009»

8 класс

1.03.2009

▷ **1.** Доказать, что если

$$\frac{m}{n+k}+\frac{n}{k+m}+\frac{k}{m+n}=1,$$

то

$$\frac{m^2}{n+k}+\frac{n^2}{k+m}+\frac{k^2}{m+n}=0.$$

▷ **2.** Дан правильный семиугольник $A_1A_2...A_7$. Докажите, что

$$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}.$$

▷ **3.** Существует ли такое число, составленное из цифр от 1 до 9 без повторений, что его произведение на 8 получается из него перестановкой цифр?

▷ **4.** Можно ли по кругу расставить 7 целых чисел так, чтобы сумма любых трех соседних равнялись 2009?

▷ **5.** Людмила в 6 раз моложе Черномора. Если между цифрами ее возраста вставить ноль, то получится возраст Черномора. Сколько лет Людмиле?

▷ **6.** Прямая раскрашена в два цвета. Доказать, что найдутся три точки A, B, C окрашенные в один цвет, такие что, для отрезков AB, BC будет выполняться равенство

$$AB = BC.$$

▷ **7.** Высота остроугольного треугольника равна 25 см. На каком расстоянии от вершины нужно провести прямую, перпендикулярную этой высоте, чтобы площадь треугольника разделить пополам?

▷ **8.** Двое играют в игру. На клетчатой полоске 1×1000 закрашивают по очереди две соседние клетки (не закрашенные предыдущими ходами). Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает?

▷ **9.** Определить a так, чтобы один из корней уравнения

$$x^2-\frac{4}{9}x+a=0$$

был квадратом другого.

▷ **10.** Доказать, что уравнение

$$x^3+y^3=z^3$$

не имеет решений в простых числах.

XVII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ «САММАТ – 2009»

9 класс

1.03.2009

▷ **1.** Найти все решения уравнения:

$$x^2 + y^2 + |x - y| = x + y - \frac{1}{2}.$$

▷ **2.** Сколько различных целочисленных решений имеет неравенство

$$|x| + |y| < 2009?$$

▷ **3.** Три олигарха — Андрей, Иван и Степан пошли со своими жёнами — Анной, Екатериной и Ольгой за покупками. Каждый платил за каждую вещь по стольку тугриков, сколько он купил вещей. Андрей купил больше Анны на 23 вещи, Иван — больше Екатерины на 11 вещей, а Степан — меньше Ольги на 23 вещи. Определите, кто на ком женат, если каждый из мужей израсходовал на 63 тугрика больше своей жены.

▷ **4.** При каких натуральных n число $n^4 + n^2 + 1$ является простым?

▷ **5.** Докажите, что существует равноугольный шестиугольник, стороны которого равны 5, 8, 11, 14, 23 и 29 в некотором порядке.

▷ **6.** Найдите сумму всех целых значений параметра a, для которых уравнение $(a^2 + 5a - 225)x^2 + 5a = 150x$ имеет два различных положительных корня.

▷ **7.** Петя и Варя нашли на лугу ромашку с 2009 лепестками. Варя предложила Пете игру: «По очереди обрываем лепестки у ромашки, причём за один раз можно оборвать один или два соседних (рядом растущих) лепестка. Выигрывает оборвавший последний лепесток. Каким будешь: первым или вторым?», Поразмыслив, Петя понял, кто выиграет при правильной игре, но он очень хотел сделать Варе приятный сюрприз, хотел, чтобы она выиграла. Какой же ответ дал Петя Варе?

▷ **8.** Прямоугольная трапеция с боковой стороной 10 и высотой 4 разделена прямой, параллельной основаниям трапеции, на две трапеции, в которые можно вписать окружности. Найдите радиусы этих окружностей.

▷ **9.** Найти наибольшее и наименьшее число не кратное 10, которое удовлетворяет следующему условию: «После зачеркивания первых двух цифр оно уменьшается в 209 раз».

▷ **10.** Докажите, что по окончании волейбольного турнира с участием 16 команд (в один круг) можно выбрать 5 команд и занумеровать их числами от 1 до 5 так, что каждая из этих команд выиграла у всех команд с бо́льшим номером.

XVII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ «САММАТ – 2009»

10 класс

1.03.2009

▷ **1.** Функция f определена на множестве положительных чисел, имеет единственную неподвижную точку $f(a) = a$ и $f\left(\dfrac{f(x)}{y}\right) = \dfrac{x}{f(y)}$. Чему равно $f(x)$?

▷ **2.** Решить уравнение: $\sqrt{x+2008} + \sqrt{2010-x} + 2x = x^2 + 1 + 2\sqrt{2009}$.

▷ **3.** Стороны треугольника — последовательные натуральные числа, радиус вписанной окружности — натуральное число. Найдите радиус описанной около этого треугольника окружности, если площадь данного треугольника не превосходит $\sqrt{2009}$.

▷ **4.** Докажите неравенство: $\sqrt{500 + \sqrt{500 + ... + \sqrt{500}}} < \dfrac{1+\sqrt{2009}}{2}$.

▷ **5.** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + b = (1-b)y, \\ y^3 + b = (1-b)x. \end{cases}$$

Найдите такие b, при которых эта система имеет ровно два решения.

▷ **6.** Союз ректоров России для награждения победителей математических олимпиад заказал дипломы I, II, III степени. Известно, что изготовление диплома I степени дороже диплома II степени на столько же, на сколько диплом II степени дороже диплома III степени, причем эта разница не привышает 40 % от цены диплома II степени. Вся стоимость дипломов I степени, как и дипломов III степени составляет 9600 рублей, а их общее число 1400. Сколько дипломов I степени было заказано и сколько стоят эти дипломы, если известно, что цены дипломов целые числа?

▷ **7.** Вычислить $\dfrac{1}{\sin 29^\circ \cdot \sin 31^\circ} + \dfrac{1}{\sin 31^\circ \cdot \sin 33^\circ} + ... + \dfrac{1}{\sin 2007^\circ \cdot \sin 2009^\circ}$.

▷ **8.** Двое играют в игру. На клетчатой полосе 1×13 закрашивают по очереди две соседние клетки (не закрашенные предыдущими ходами). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

▷ **9.** Существует ли число $n > 1$ такое, что система

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n = 100, \\ a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = \dfrac{1}{100}, \end{cases}$$

а) имеет решение; б) не имеет решений?

▷ **10.** Докажите, что для любых 25-ти действительных чисел можно всегда выбрать такие два числа x, y, что

$$0 < \frac{x-y}{1+xy} < \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}.$$

XVII МЕЖРЕГИОНАЛЬНАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ «САММАТ – 2009»

11 класс

1.03.2009

▷ **1.** Ассоциация олигархов России, в связи с экономическим кризисом, решила объединиться на паритетных началах и построить горнолыжный курорт в поселке Красная Глинка, стоимостью от 120 до 180 млн. долларов, но к подписанию договора 5 олигархов разорились. В связи с этим, остальным для реализации проекта, пришлось внести еще по 3 млн. долларов. Сколько было олигархов в этой ассоциации и какова стоимость проекта если известно, что первоначальный взнос исчислялся целым числом?

▷ **2.** Стороны треугольника последовательные натуральные числа. Какие натуральные значения может принимать радиус вписанной окружности, если известно, что $S_{\triangle} \leqslant 2009$ ед^2.

▷ **3.** Из шара с центром O и заданным радиусом R вырезали шар заданного радиуса $r \leqslant \dfrac{R}{2}$, сфера которого проходит через O. Постройте с помощью циркуля и линейки отрезок $|OM|$, где M — центр масс «дырявого» шара.

▷ **4.** Определить знак суммы: $\dfrac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 3^\circ} + \dfrac{1}{\cos 3^\circ \cdot \cos 5^\circ} + ... + \dfrac{1}{\cos 2007^\circ \cdot \cos 2009^\circ}$.

▷ **5.** Можно ли найти 2009-значное число, которое после зачеркивания первых трех цифр уменьшается в 2009 раз?

▷ **6.** Внутри остроугольного треугольника ABC взята точка M. Выбрать на двух сторонах треугольника ABC точки P и Q так, чтобы периметр треугольника PQM был наименьшим.

▷ **7.** Найти все натуральные числа, взаимно простые со всеми членами последовательности
$$a_n = 4^n + 5^n + 11 \cdot 20^n - 1, \qquad n \geqslant 1.$$

▷ **8.** Существует ли такое число $n > 1$, что система
$$\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n = 2009, \\ a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = \dfrac{1}{2009} \end{cases}$$
а) не имеет решений; б) имеет единственное решение?

▷ **9.** Найдите сумму всех целых x, удовлетворяющих неравенству
$$x^4 - 2\sqrt{2009}x^2 + x + 2009 - \sqrt{2009} < 0.$$

▷ **10.** Функция $f : R \to R$ удовлетворяет условию
$$f(x+y) = f(x)f(y) - f(2009-x)f(2009-y)$$
для любых $x, y \in R$. Найти $f(2) - \cos\dfrac{\pi}{2009}$, если известно, что $f(8036) \geqslant 1$.