САММАТ-2008

7 КЛАСС

1. Вместо знаков $*$ вставьте такие числа, чтобы равенство
$$(x^2 + * \cdot x + 2)(x+3) = (x + *)(x^2 + * \cdot x + 6)$$
стало тождеством.
2. Расстояние между двумя машинами, едущими по шоссе, равно 600 км. Скорости машин – 90 км/ч и 120 км/ч. Чему будет равно расстояние между ними через 40 мин.
3. Как при помощи только семи цифр 7, знаков арифметических действий и скобок представить каждое из чисел от 0 до 10 включительно?
4. Ученик написал на доске пример на умножение двузначных чисел. Затем он стер все цифры и заменил их буквами. Получилось равенство: $AB * CD = MLNKT$. Восстановите пример.
5. После некоторого числа стирок, ширина и высота куска хозяйственного мыла, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, уменьшилась вдвое. Известно, что оставшегося куска мыла хватит на 2 стирки. На сколько стирок хватило данного куска.
6. Вася задумал число и разделил его на 100. В результате получилось число, которое на 34,65 меньше задуманного. Какое число задумал Вася?
7. Не используя калькулятора, приведите пример дроби, которая больше $\frac{11}{19}$, но меньше $\frac{7}{12}$. Ответ обоснуйте.
8. Решите уравнение в натуральных числах: $\left[x^2, y\right] + \left[x, y^2\right] = 2008$.
($\left[a,b\right]$ обозначает наименьшее общее кратное чисел a и b.)

(А. Голованов)
9. В четырехугольнике $ABCD$, $AB = BC, CD = DA$. Точки K и L расположены на отрезках AB и BC таким образом, что $BK = 2AK$, $BL = 2CL$. Точки M и N - середины отрезков CD и DA соответственно. Докажите, что отрезки KM и LN равны.

(А. Голованов)
10. Баба –Яга и Кащей собрали некоторое количество мухоморов. Количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги в 13 раз больше, чем на мухоморах Кащея, но после того, как Баба-Яга отдала Кащею свой мухомор с наименьшим числом крапинок, на её мухоморах стало крапинок только в 8 раз больше, чем у Кащея. Докажите, что в в начале у Бабы –Яги было не более 23 мухоморов.

(К. Кохась)

САММАТ-2008

8 КЛАСС

1. При каких целых m множество решений неравенства $201|x+3|-m|x-1|<804$ принадлежит отрезку $[-200;8]$. В ответе укажите сумму этих m.

2. Вместо знаков $*$ вставьте такие числа, чтобы равенство

$$(x^2+*\cdot x+2)(x+*)=(x+*)(x^2+*\cdot x+6)$$

стало тождество. Сколько таких равенств существует.

3. Куб покрасили со всех сторон и распилили на равные кубики. Оказалось, что кубиков, у которых покрашена ровно одна грань, столько же сколько не покрашенных кубиков. На сколько кубиков распилили куб?

4. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбрана произвольная точка M и из неё опущены перпендикуляры MK и MP на катеты этого треугольника. При каком положении точки M длина отрезка PK будет наименьшей?

5. Решите уравнение $|x+4|+|x|+|x-4|=8-x^2$.

6. a,b,c - стороны треугольника с периметром 1. Докажите неравенство:

$$\frac{1+a}{1-2a}+\frac{1+b}{1-2b}+\frac{1+c}{1-2c}>6.$$

7. Тушенка продается в банках пяти типов – они различаются по весу и цене (см. таблицу). На складе имеется 1994 банки общим весом 1 тонна. Докажите, что их общая стоимость меньше 1600000 рублей.

(К. Кохась)

Вес, г	Цена, руб
330	600
420	700
550	800
640	900
710	1000

8. Целые числа m,n,k таковы, что $k^2-m^2-n^2=2(m-n)(k-m+n)$. Докажите, что число $2mn$ является точным квадратом.

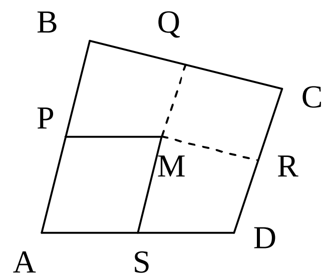
(С. Берлов)

9. Расставьте в клетках квадрата 3×3 вещественные числа так, чтобы сумма любых двух соседних по горизонтали чисел была равна 6, а произведение любых двух соседних по вертикали чисел было равно 4.

(С. Иванов)

10. Точки P,Q,R,S - середины соответственно сторон AB,BC,CD,DA выпуклого четырехугольника $ABCD$, M - точка внутри этого четырехугольника такая, что $APMS$ - параллелограмм. Докажите, что $CRMQ$ - тоже параллелограмм.

(А. Храбров)



САММАТ-2008

9 КЛАСС

1. Даны квадратичные функции $f(x)$ и $g(x)$, касающиеся оси Ox. Может ли график функции $y = f(x) + g(x)$ касаться оси Ox.

2. Найдите наибольшее количество решений системы $\begin{cases} |x-y|+|x+y|=4, \\ |x-1|+|y+1|=a. \end{cases}$

3. Найдите все целые числа m,n,k, если известно, что $m+n+k=10$ и $mn+mk+nk=37$.

4. Вычислите $\sqrt{\underbrace{44\ldots4}_{2008 цифр} + \underbrace{11\ldots1}_{1005 цифр} - \underbrace{66\ldots6}_{1004 цифры}}$. Сколько раз в данном числе встречается цифра 3.

5. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB. Пусть K - середина дуги BC, не содержащей точку A; N - середина отрезка AC, M - точка пересечения луча KN с окружностью. В точках A и C проведены касательные к окружности, которые пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle EMK = 90^0$.

6. Решите в натуральных числах уравнение: $x^{\left(2^x\right)} = y^{\left(512^y\right)}$.

(Д. Карпов)

7. Найти все прямоугольные треугольники, стороны которых составляют арифметическую прогрессию.

8. Некто, войдя в лифт на одном из средних этажей небоскреба, обнаружил, что при нажатии кнопки «вверх» кабина пролетает сразу a этажей, а при нажатии кнопки «вниз» падает на b этажей. Каков ближайший верхний этаж , на который можно добраться на лифте?

9. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел не может быть полным квадратом натурального числа.

10. Квадрат со стороной 6 выложен косточками домино размером 1×2. Доказать, что существует прямая, по которой можно разрезать квадрат, не повредив косточек домино.

CAMMAT-2008

10 КЛАСС

1. Найдите все целые решения неравенства $x^2 < 3 - 2\sin 5x$.

2. Центр, вписанный в равнобедренный треугольник окружности, делит его высоту на отрезки длины 5 и 3. Найдите длины сторон треугольника.

3. Каждая из пяти прямых рассекает квадрат на два четырехугольника площади которых относятся как 1:2. Доказать, что из этих пяти прямых найдется пара прямых, которые проходят через одну точку.

4. Ваня предлагает Вите выписать N различных двузначных чисел. При каком наименьшем N Ваня всегда сможет выбрать среди выписанных Витей чисел такие два, что их разность записывается двумя одинаковыми цифрами?

5. Выписаны в ряд числа от 1 до 2000. Играют двое, делая ходы поочередно. За один ход разрешается вычеркнуть любое из записанных чисел вместе со всеми его делителями. Выиграет тот, кто зачеркнет последнее число. Докажите, что у первого игрока есть способ играть так, чтобы всегда выигрывать.

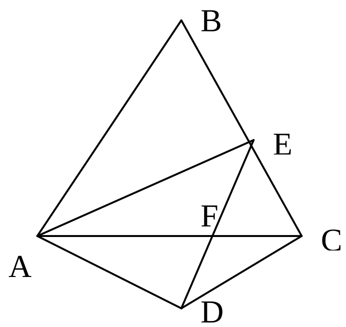
6. Может ли сумма 1000 последовательных нечетных чисел быть 2008 степенью натурального числа?

7. Решить систему уравнений: $\begin{cases}(2y+x)(4y^2-x^2)=75,\\(2y-x)\left(4y^2+x^2\right)=51.\end{cases}$

8. Фабрика выпускала товар в упаковке по 3 и 5 кг. Докажите, что магазин без нарушения упаковки может отпустить любое количество килограммов этого продукта, превосходящее 7 кг.

9. На отрезке AC как на основании в разных полуплоскостях построены равнобедренные треугольники ABC и ADC, причем $\angle ADC = 3\angle ACB$. AE - биссектриса треугольника ABC, отрезки DE и AC пересекаются в точке F. Докажите, что треугольник CEF - равнобедренный.

(С. Иванов)



10. Найти все числа x, принадлежащие отрезку $[0;1]$, и удовлетворяющие уравнению

$$\sin^4\left(\frac{1}{2}\arccos^2 2x\right)+\cos^4\left(\frac{1}{2}\arccos^2 2x\right)=1.$$

САММАТ 2008

11 КЛАСС

1. Внутри параболы $y = x^2$ расположены окружности $w_1, w_2, \ldots$ так, что при каждом $n > 1$ окружность w_n касается w_{n-1} и ветвей параболы $y = x^2$. Какие значения может принимать r_{2008} ? Может ли $r_{2008} = 2007$?

2. При каких действительных a система $\begin{cases} y + \ln\dfrac{|y|}{x} = x \\ y + 2(x+a)^2 = x + 2a + 4 \end{cases}$ имеет единственное решение?

3. Сумма нескольких идущих подряд натуральных чисел в 20 раз больше наибольшего и в 30 раз больше наименьшего. Найдите эти числа.

4. Каждая из пяти прямых рассекает квадрат на два четырехугольника площади, которых относятся как 2:3. Доказать, что из этих пяти прямых найдется пара, которые проходят через одну точку.

5. Известно, что выполняются условия a_1=1, $a_1 - 3a_2 + 2a_3 \geq 0$, $a_2 - 3a_3 + 2a_4 \geq a_3 - 3a_4 + 2a_1 \geq 0$, $a_4 - 3a_1 + 2a_2 \geq 0$. Найти a_2, a_3, a_4.

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и AE, пересекающиеся в точке P. Докажите, что $AB^2 = AP \cdot AE + BP \cdot BD$.

(Д. Фомин)

7. Пусть a, b- положительные числа. Известно, что квадратный трехчлен $y^2 - ay + b$ имеет дискриминант $d > 0$, причем $2a > d$. Докажите, что множество точек, в которых значения многочлена $x^4 - (a+1)x^2 - \sqrt{d}x + b$ неположительны, представляет собой объединение двух отрезков с суммой длин 2.

8. Миша задумал натуральное число, умножил его на 1.7, результат округлил до целого, снова умножил на 1.7 и опять округлил результат до целого. Получилось 330. Какое число задумал Миша?

(К. Кохась)

9. Для углов треугольника a, b, g доказать: $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 g \geq \dfrac{3}{4}$.

10. В треугольной пирамиде сумма квадратов длин сторон основания равна a^2, а сумма квадратов длин боковых ребер равна b^2. Найдите длину отрезка, соединяющего вершину с точкой пересечения медиан основания.