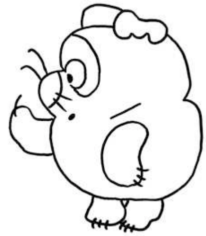
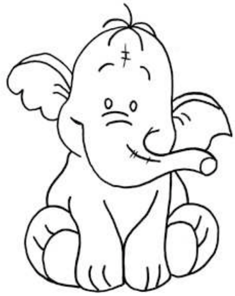
Самарский Государственный Университет

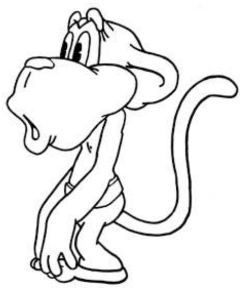


XV КОМАНДНОЕ ПЕРВЕНСТВО ПО МАТЕМАТИКЕ

САММАТ-2007



УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ



САМАРА
4 марта 2007 года

В сборнике представлены условия задач, предлагавшихся на командном первенстве по математике САММАТ в 2007 году, с указаниями и решениями.

В обсуждении задач приняли участие:
А. А. Андреев, А. Н. Савин, И. Н. Саушкин, С. В. Лексина.

Электронная версия данной книги размещена на сайтах
`http://www.uic.ssu.samara.ru/~nauka/`,
`http://www.mathguru.ru/`
и доступна для свободного некоммерческого использования.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

7-й класс

▸**7.1.** На пиратском корабле трудятся 67 морских разбойников. У 47 из них есть ухо, у 35 — глаз, а у 23 счастливчиков есть и то, и другое. Сколько пиратов не имеют ни уха, ни глаза?

▸**7.2.** На рис. 1 изображена фигура. Одним разрезом поделите ее на две части и сделайте из них квадрат. Бумага в клеточку облегчит вам решение задачи.

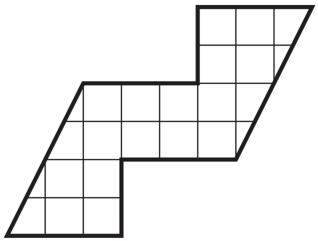


Рис. 1

▸**7.3.** По асфальту колонна машин двигалась со скоростью 90 км/ч, а интервалы между соседними машинами составляли 18 м. Когда колонна свернула на грунтовую дорогу, ее скорость упала до 40 км/ч. Какими стали интервалы между машинами?

▸**7.4.** Имеется 2007 яблок. Имеются весы, с помощью которых возможно узнать вес любых двух яблок. Как за 1005 взвешиваний узнать общий вес всех яблок?

▸**7.5.** Нарисуйте фигуру, которой нельзя покрыть полукруг радиуса 1, но двумя экземплярами которой можно покрыть круг радиуса 1.

▸**7.6.** Разложите на два последовательных натуральных множителя число 11112222.

▸**7.7.** В M-образной ломаной $ABCDE$ $AB = BC = CD = DE$, $\angle ABC = \angle CDE$, M — середина BD. Докажите, что $MA = ME$.

▸**7.8.** Можно ли увезти 50 камней, массы которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, 376 кг, …, 468 кг, на семи трехтонных грузовиках?

▸**7.9.** Пятеро крестьян собрали урожай. Первый решил, что собрал больше остальных, и разделил между ними поровну 1/3 своего зерна. После этого второй решил поделиться с остальными, и сделал то же самое, что и первый. В результате весь урожай разделился поровну. Определите, сколько собрал каждый, если общий вес зерна 64 кг.

▸**7.10.** Сколько различных восьмизначных чисел можно получить, переставляя цифры числа 20072007?

8-й класс

▸**8.1.** Разложите на множители

$$2007x^4 - 2006x^3 + 2007x^2 + 1.$$

▸**8.2.** Вычислите

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\ddots\cfrac{}{2-\cfrac{1}{2}}}} \quad \text{(100 двоек).}$$

▸**8.3.** Сколько картин написал художник Бледномазов за месяц, если на 45% из них изображены горы, на 35% изображено море, на 10% — и море, и горы, а на 12 картинах — ни море, ни горы и не пойми что?

▸**8.4.** Газету 10 раз сложили пополам (поочередно вдоль и поперек), после чего оторвали от нее 4 угла. Если теперь развернуть газету, то сколько в ней будет дырок? (Оторванный кусок на границе газеты дыркой не считается.)

▸**8.5.** На сковородке лежат два квадратных блина так, как показано на рис. 2. Можно ли рассечь их одним прямолинейным разрезом на равные части каждый?

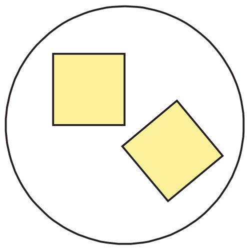


Рис. 2

▸**8.6.** Два пешехода вышли на рассвете. Каждый шел с постоянной скоростью. Один шел из A в B, другой — из B в A. Они встретились в полдень и, не прекращая движения, пришли: один в B в 4 часа вечера, а другой — в A в 9 часов вечера. В котором часу в тот день был рассвет?

▸**8.7.** В десятичной записи числа 1/14 вычеркнули 2007-ю цифру после запятой. Что больше: полученное число или 1/14?

▸**8.8.** Дан прямоугольный треугольник, один из углов которого равен 30°. Из середины его гипотенузы восстановлен перпендикуляр к ней. Докажите, что длина отрезка этого перпендикуляра, лежащего внутри треугольника, равна трети длины большего катета.

▸**8.9.** Существует ли натуральное число n такое, что $5n$ является пятой степенью натурального числа, $6n$ — шестой степенью, $7n$ — седьмой степенью?

▸**8.10.** Найдите два трехзначных числа x и y, что сумма всех остальных трехзначных чисел равна $600x$.

9-й класс

▸**9.1.** Известно, что $p\%$ числа x меньше $q\%$ числа y на $r\%$ числа $x-y$. На сколько процентов (относительно числа y) число x больше числа y?

▸**9.2.** График функции $y = \dfrac{x}{34} + 60$ отразили симметрично относительно прямой $y = -x + 1$. График какой функции получился?

▸**9.3.** Последовательность a_n удовлетворяет при любом натуральном n соотношению

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}.$$

Найдите a_{2007}, если $a_{33} = 3$, $a_{44} = 4$.

▸**9.4.** Петя вычислил сумму $1 + 2 + \ldots + N$ и зачеркнул в ней последние три цифры. У него опять получилось N. Найдите N.

▸**9.5.** От квадратного торта 5×5 отрезали прямоугольный кусок 2×3, как показано на рис. 3. Как разделить оставшийся кусок одним прямолинейным разрезом на две равновеликие части?

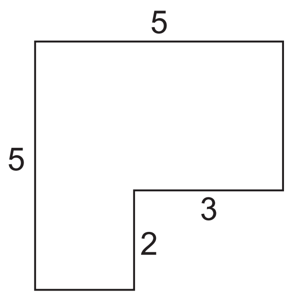


Рис. 3

▸**9.6.** Последняя цифра числа двойка, и ее перенесли в начало. В результате число удвоилось. Найдите такое число.

▸**9.7.** Известно, что

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 = -1, \\ x^5 + y^5 + z^5 = -1. \end{cases}$$

Чему равно $x + y + z$?

▸**9.8.** Найдите пятую цифру после запятой следующей суммы

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \ldots + \frac{9}{10!},$$

записанной в десятичной форме.

▸**9.9.** Известно, что

$$a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2.$$

Докажите, что

$$a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4.$$

▸**9.10.** Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника PCD равна половине площади четырехугольника $ABCD$, то $BC \parallel AD$.

10-й класс

▸**10.1.** Решите уравнение

$$\left[x+\frac{1}{2}\right] = [2x] - [x].$$

▸**10.2.** Существует ли плоский четырёхугольник, у которого тангенсы всех внутренних углов равны?

▸**10.3.** От квадратного торта 5×5 отрезали прямоугольный кусок 4×3, как показано на рис. 4. Как разделить оставшийся кусок одним прямолинейным разрезом на две равновеликие части?

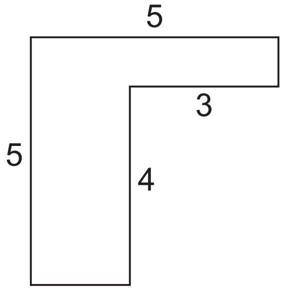


Рис. 4

▸**10.4.** (*Задача Льюиса Кэрролла.*) В ожесточенном сражении при Трафальгаре 70% участников потеряли глаз, 75% — ухо, 80% — руку, 85% — ногу. Каков наименьший процент числа ветеранов, лишившихся одновременно глаза, уха, руки и ноги?

▸**10.5.** Что больше:

$$\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ} \text{ или } \frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}?$$

▸**10.6.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$abc + a + b + c = ab + bc + ca + 2007?$$

▸**10.7.** На плоскости проведена окружность с центром O радиуса 1. Две соседние вершины квадрата лежат на этой окружности. На каком наибольшем расстоянии от точки O могут лежать две другие его вершины?

▸**10.8.** Решите неравенство:

$$1,(1) + 2,(2) + 3,(3) + \ldots + n,(n) < 677,(27).$$

▸**10.9.** Зная, что

$$13717421 = 761^2 + 7\cdot 1370^2 = 439^2 + 7\cdot 1390^2,$$

разложите 13717421 на множители.

▸**10.10.** Все натуральные числа поделены на хорошие и плохие. Известно, что если n — хорошее, то и число $n+6$ — хорошее, а если число m — плохое, то и число $m+15$ — плохое. Может ли число 1 быть хорошим, а 1000 — плохим?

11-й класс

▸**11.1.** С помощью угольника (умеет проводить прямую через две точки и восстанавливать перпендикуляр к прямой в данной точке этой прямой) опустите перпендикуляр из данной точки на данную прямую.

▸**11.2.** Решите уравнение

$$\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]-[x].$$

▸**11.3.** Что больше:

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 2006}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 2007} \text{ или } 1?$$

▸**11.4.** Для функций f и g, заданных на всей оси, выполнено тождество:

$$f(x)g(y)=axy+bx+cy+1, \quad (a,b,c=\text{const}).$$

Докажите, что $a=bc$.

▸**11.5.** Пусть P — середина стороны AB выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если площадь треугольника PCD равна половине площади четырехугольника $ABCD$, то $BC \parallel AD$.

▸**11.6.** Найдите наибольшее значение выражения a^3b-b^3a, если выполнено условие $a^2+b^2=1$.

▸**11.7.** Пусть $a\circ b=a+b-ab$. Найдите все такие тройки (x,y,z) целых чисел, что

$$(x\circ y)\circ z+(y\circ z)\circ x+(z\circ x)\circ y=0.$$

▸**11.8.** В некоторой системе счисления взято число вида

$$10\underbrace{11\ldots11}_{n\text{ раз}}01.$$

Известно, что это число, будучи записано в десятичной системе счисления, при любом натуральном n делится на 61. При каком наименьшем основании системы счисления это возможно?

▸**11.9.** Существует ли 2007 различных натуральных чисел таких, что сумма любых 2006 из них делится на оставшееся?

▸**11.10.** Первая цифра чисел 5^n и 2^n одна и та же. Какая это цифра?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

▸ **7.1.** *Ответ.* 8. Есть глаз или ухо у $47 + 35 - 23 = 59$ пиратов. Значит, у $67 - 59 = 8$ пиратов нет ни глаза, ни уха.

▸ **7.2.** См. рис. 5.

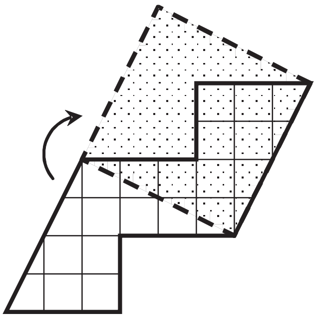


Рис. 5

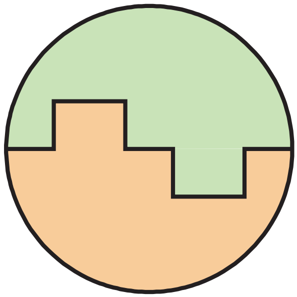


Рис. 6

▸ **7.3.** *Ответ.* 8 м. Когда первая машина свернет на грунтовую дорогу, второй нужно будет проехать 18 м. Первая тем временем сдвинется на какое-то расстояние, что и составит новый промежуток между машинами. Сдвинется она во столько же раз меньше, во сколько ее скорость меньше, т. е. на $18\text{ м} \cdot \dfrac{4}{9} = 8$ м.

▸ **7.4.** Так как число яблок нечетно, их не получится разбить на пары. Определим сначала вес каких-то трех яблок. Взвесим яблоки 1 и 2, потом 2 и 3, затем 1 и 3. Сложим полученные веса и разделим на два, ведь каждое из этих яблок мы взвешивали дважды. Нам понадобилось 3 взвешивания. Оставшиеся $2007 - 3 = 2004$ яблока разобьем на пары и взвесим парами. Еще 1002 взвешивания. Итого 1005.

▸ **7.5.** Подойдет любая «инь-янь» подобная фигура, например, см. рис. 6.

▸ **7.6.** $11112222 = 1111 \cdot 10000 + 2222 = 1111 \cdot (10000 + 2) = 1111 \cdot 10002 = 1111 \cdot 3 \cdot 3334 = 3333 \cdot 3334$.

▸ **7.7.** В равнобедренном $\triangle BCD$ $\angle CBD = \angle CDB$, поэтому $\angle ABM = \angle EDM$ как сумма двух равных (рис. 7). Следовательно, $\triangle ABM = \triangle EDM$ по первому признаку. Отсюда $AM = EM$.

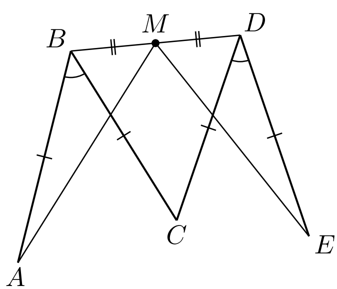


Рис. 7

▸ **7.8.** *Ответ.* Нельзя. Так как грузовиков 7, а камней 50, то на каком-то грузовике нужно будет увезти не менее 8 камней (принцип Дирихле). Однако сумма восьми самых легких камней $370+372+\ldots+384=(370+384)\cdot 4=$ $=3016$ кг >3 т.

▸ **7.9.** *Ответ.* 16,8 кг, 17,8 кг, 9,8 кг, 9,8 кг, 9,8 кг. Будем решать задачу в обратном порядке. В конце у всех стало $64/5$ кг урожая. Перед этим второй отдал $1/3$ своего урожая, т. е. 2 части он оставил себе и 1 часть отдал, поэтому отдал он вдвое меньше, чем у него осталось. Таким образом, второй отдал $32/5$ кг (по $8/5$ кг каждому), а было у него $64/5+32/5=96/5$ кг. Перед тем, как второй поделился своим урожаем, у 1-го, 3-го, 4-го и 5-го было $64/5-8/5=56/5$ кг.

Теперь проведем аналогичные рассуждения для первого крестьянина. После того, как он поделился, у него осталось $56/5$ кг, значит, отдал он $28/5$ кг (по $7/5$ кг каждому), а вначале у него было $56/5+28/5=84/5$ кг. Соответственно, у второго вначале было $96/5-7/5=89/5$ кг, а у 3-го, 4-го и 5-го $56/5-7/5=49/5$ кг.

▸ **7.10.** *Ответ.* 210. На первом месте может стоять только 2 или 7 (если ноль, число не будет восьмизначным). Рассмотрим случай, когда на первом месте стоит 2. На оставшиеся 7 позиций нужно расставить четыре 0, одну 2 и две 7 в любом порядке. Это равносильно нахождению числа способов переставить буквы $AAAABCC$. Сделаем сначала все буквы разными, приписав индексы: $A_1A_2A_3A_4BC_1C_2$. Теперь посчитаем число перестановок. Их 7! (на первую позицию есть 7 возможностей поставить букву, на следующую 6, далее 5 и т. д., всего $7\cdot 6\cdot 5\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1=7!$ способов). Выпишем все 7! перестановок и сотрем индексы сначала у букв C_1 и C_2. Каждая перестановка будет встречаться по два раза. Уберем повторяющиеся, останется $7!/2$ перестановок. Теперь сотрем индексы у букв A. Опять появятся одинаковые, но повторений будет уже 4! (столькими способами можно переставить четыре буквы A). Уберем повторения, останется $\dfrac{7!}{2\cdot 4!}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5}{2}=105$ различных перестановок. Если же первая цифра 7, то, аналогично, имеем еще 105 способов переставить оставшиеся цифры. Всего 210 способов.

▸ **8.1.** $2007x^4-2006x^3+2007x^2+1=(2007x^4-2007x^3+2007x^2)+x^3+1=$ $=2007x^2(x^2-x+1)+(x+1)(x^2-x+1)=(2007x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

▸ **8.2.** *Ответ.* $\dfrac{100}{101}$. Заметим, что

$$\frac{1}{2-\frac{1}{2}}=\frac{2}{3},\qquad \frac{1}{2-\frac{2}{3}}=\frac{3}{4},\qquad \frac{1}{2-\frac{3}{4}}=\frac{4}{5},$$

и, вообще, если на предыдущем шаге было $\dfrac{n}{n+1}$, то на следующем будет

$\dfrac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{n+2}$ (индукция). Поэтому, если в выражении содержится n двоек, то оно равно $\dfrac{n}{n+1}$.

▸**8.3.** *Ответ.* 40. Пусть художник написал x картин. Тогда море или горы изображены на $0,45x+0,35x-0,1x=0,7x$ картинах. Получается: $0,7x+ +12=x$, откуда $x=40$.

▸**8.4.** *Ответ.* 961. Газету сгибали 5 раз вдоль и 5 раз поперек. С каждым сгибом число частей, на которые газета делится этими сгибами, удваивается. Поэтому если газету согнуть 5 раз в одном направлении, то газета разделится на $2^5=32$ части, а число сгибов (промежутков между частями) будет на один меньше, т. е. 31. Значит, в нашем случае всего получился 31 продольный сгиб и 31 поперечный. На пересечении каждых двух сгибов будет дырка. Всего получается $31^2=961$ дырка.

▸**8.5.** *Ответ.* Можно. Прямая, проходящая через центр квадрата, делит его на две равные части (докажите). Поэтому достаточно провести прямую через центры двух квадратов.

▸**8.6.** *Ответ.* В 6 часов утра. Пусть рассвет был в x часов. До полудня пешеходы шли $12-x$ часов и прошли $v_A(12-x)$ и $v_B(12-x)$ соответственно. После полудня первый шел 4 часа и прошел путь $v_A\cdot 4$, а второй шел 9 часов и прошел $v_B\cdot 9$. Получаем

$$\begin{cases} v_A(12-x)=v_B\cdot 9,\\ v_A\cdot 4=v_B(12-x). \end{cases}$$

Поделим одно уравнение на другое: $\dfrac{12-x}{4}=\dfrac{9}{12-x}$. Отсюда из пропорции $(12-x)^2=36$ и, поскольку $12-x>0$, находим $x=6$.

▸**8.7.** Полученное число больше. Поскольку $\dfrac{1}{14}=0,0(714285)$, а длина периода дроби равна 6 и предпериод в одну цифру, на 2007-м месте после запятой стоит цифра 1, а после ее вычеркивания на ее месте оказывается 4.

▸**8.8.** В треугольнике AKB (рис. 8) KM является медианой и высотой, поэтому $\triangle AKB$ — равнобедренный и $AK=KB$, $\angle A=\angle ABK=30^\circ$. Отсюда $\angle CBK=60^\circ-30^\circ=30^\circ$. Получается, что $\triangle MBK=\triangle CBK$ (ВК — общая и угол 30°), значит, $MK=KC$. С другой стороны, $KC= =\dfrac{1}{2}KB=\dfrac{1}{2}AK$, поэтому KC равна $1/3$ от стороны AC (большего катета). Таким образом, $MK=KC=\dfrac{1}{3}AC$.

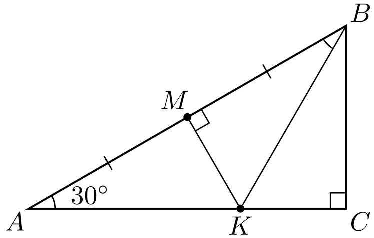


Рис. 8

▸**8.9.** *Ответ.* Существует. Например, число $5^{84}\cdot 6^{35}\cdot 7^{90}$ удовлетворяет условию.

Из условия следует, что n делится на 5, 6 и 7. Будем искать n в виде $n = 5^k \cdot 6^l \cdot 7^m$. При этом

$$\begin{array}{lll} k+1 \,\vdots\, 5, & k \,\vdots\, 6, & k \,\vdots\, 7, \\ l \,\vdots\, 5, & l+1 \,\vdots\, 6, & l \,\vdots\, 7, \\ m \,\vdots\, 5, & m \,\vdots\, 6, & m+1 \,\vdots\, 7. \end{array}$$

После сделанных замечаний нужные значения k, l, m подбираются без труда.

▸**8.10.** *Ответ.* $x = 822$, $y = 528$. Сумма всех трехзначных чисел равна $(100+999)\cdot 450 = 494550$ (разбиваем на 450 пар равноудаленных от концов чисел). По условию $494550 - x - y = 600x$, откуда

$$x = 822 + \frac{528 - y}{601}.$$

Поскольку x — натуральное, то $528 - y \,\vdots\, 601$. Для трехзначного y это возможно только при $y = 528$ и, значит, $x = 822$.

▸**9.1.** *Ответ.* На $\dfrac{q-p}{p+r}\cdot 100\%$. По условию

$$\frac{p}{100}x + \frac{r}{100}(x-y) = \frac{q}{100}y.$$

Находим: $\dfrac{x}{y} = \dfrac{r+q}{p+r} = 1 + \dfrac{q-p}{p+r}$, отсюда ответ. (Правда x будет больше y, если $q > p$, иначе x меньше y на соответствующее число процентов.)

▸**9.2.** *Ответ.* $y = 34x + 2007$. Если отразить точку (x, y) относительно прямой $y = -x + 1$, то она перейдет в точку $(-y+1, -x+1)$. Сделаем эту замену в исходной функции, получим:

$$-x + 1 = \frac{-y+1}{34} + 60.$$

Выражая отсюда y через x, получаем ответ.

▸**9.3.** *Ответ.* 1. Обозначим $a_1 = a$, $a_2 = b$ и вычислим несколько первых членов последовательности: $a_3 = \dfrac{b+1}{a}$, $a_4 = \dfrac{a+b+1}{ab}$, $a_5 = \dfrac{a+1}{b}$, $a_6 = a$, $a_7 = b$. Далее все будет повторяться с периодом в пять членов. Таким образом, $a_{33} = a_3$, $a_{44} = a_4$ и $a_{2007} = a_2$. Получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{b+1}{a} = 3, \\ \dfrac{a+b+1}{ab} = 4. \end{cases}$$

Отсюда находим $a = 2/3$, $b = 1$.

▸**9.4.** *Ответ.* 1999. Из условия

$$1000N \leqslant \frac{N(N+1)}{2} < 1000(N+1).$$

Из первого неравенства $1000 \leqslant \dfrac{N+1}{2}$, т. е. $1999 \leqslant N$. Из второго неравенства $\dfrac{N}{2} < 1000$, т. е. $N < 2000$. Этим двум условиям удовлетворяет только $N = 1999$.

▸**9.5.** См. рис. 9.

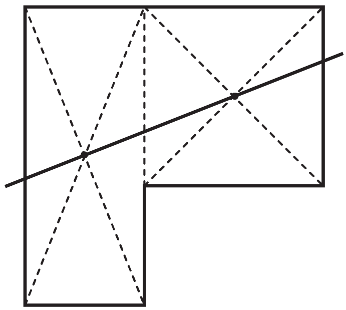


Рис. 9

▸**9.6.** *Решение 1.* Пусть искомое число записывается последовательностью цифр X. Последняя цифра числа $2\overline{X}$ — четверка, поэтому X имеет вид $\ldots 42$, и число $2\overline{X}$ записывается как $\ldots 84$. Следовательно, X имеет вид $\ldots 842$, а $2\overline{X}$ записывается как $\ldots 684$, далее $X = \ldots 6842$, откуда $2\overline{X} = \ldots 3684$ и $X = \ldots 36842$ и т. д. Последовательность цифр строится однозначно, в итоге имеем:

$$X = 105263157894736842.$$

Последовательность $X = 105263157894736842$ можно продолжить и дальше. Аналогично рассуждая, можно показать, что множество всех чисел, удовлетворяющих условию задачи, имеет вид $\overline{XX \ldots X}$.

Однако на эту задачу можно посмотреть и с несколько неожиданной точки зрения.

Решение 2. Пусть $X = Y2$. Тогда $\overline{Z} = 2\overline{X} = \overline{2Y}$. Рассмотрим бесконечную периодическую дробь $x = 0,(X)$. Тогда

$$(x+2)/10 = 0,2(X) = 0,2Y2Y2Y\ldots = 0,ZZZ\ldots = 0,(Z) = 2x.$$

Откуда x удовлетворяет уравнению $(x+2)/10 = 2x$ и $x = 2/19$. Таким образом, X есть период дроби $2/19$, и в результате вращения цифр в периоде этой дроби получаются дроби вида $1/19$, $2/19$, $\ldots$, $18/19$.

▸**9.7.** *Ответ.* -1. Заметим, что в силу первого уравнения системы каждое из неизвестных по модулю не превышает 1, поэтому

$$x+1 \geqslant 0, \qquad y+1 \geqslant 0, \qquad z+1 \geqslant 0.$$

Сложив первое и второе уравнения системы, получаем

$$x^2(x+1) + y^2(y+1) + z^2(z+1) = 0.$$

Это возможно лишь в том случае, когда каждое неотрицательное слагаемое в сумме равно нулю, следовательно, любое неизвестное может равняться только 0 или -1. Из первого уравнения системы следует, что значение -1 может принимать только одно из неизвестных, отсюда

$$x+y+z = -1.$$

Последнее уравнение системы не потребовалось.

▸**9.8.** Все слагаемые суммы можно представить в следующем виде

$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}.$$

Поэтому исходная сумма равна

$$\left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{9!} - \frac{1}{10!}\right) = 1 - \frac{1}{10!}.$$

Так как $10! > 10^5$, то $1 - \dfrac{1}{10!} > 1 - 10^{-5} = 0,99999$. Следовательно, пятая цифра после запятой — девятка.

▸**9.9.** Нетрудно проверить, что

$$\left(a^2 + b^2 + (a+b)^2\right)^2 = 2\left(a^4 + b^4 + (a+b)^4\right).$$

▸**9.10.** Воспользуемся тем, что медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника, ведь высота у них общая, а основания — равные половинки. Имеем (рис. 10)

$$\frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{\triangle APD} + S_{\triangle PBC} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABD} + \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}.$$

Таким образом, $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ABC}$. Посмотрим, как $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ покрывают четырехугольник $ABCD$. Область ABO покрыта дважды, а область CDO не покрыта вовсе. Но поскольку суммарная площадь $\triangle ABD$ и $\triangle ABC$ равна площади четырехугольника, то $S_{\triangle ABO} = S_{\triangle CDO}$. (Этот факт известен под названием «лемма о линолеуме»: площадь, покрытая дважды, равна непокрытой площади, если сумма кусков составляет всю площадь пола.)

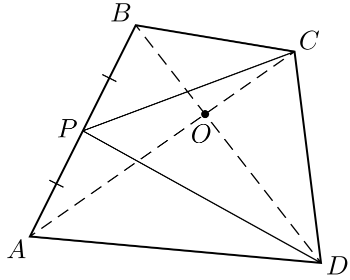


Рис. 10

Имеем равные по площади «крылья бабочки» ($\triangle ABO$ и $\triangle CDO$), как в трапеции и параллелограмме. Теперь понятно: добавим к обеим «крыльям» $\triangle BOC$. Получается, $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle DBC}$, и поскольку у этих треугольников основание BC общее, то их высоты, опущенные из вершин A и D соответственно, равны. Значит, $AD \parallel BC$.

▸ **10.1.** *Ответ.* x — любое число. См. решение задачи 11.2. Нужно рассмотреть два интервала для дробной части: $[0;\ 1/2)$ и $[1/2;\ 1)$.

▸ **10.2.** *Ответ.* Да, существует. Это четырехугольник, у которого три угла равны 45°, а четвертый — 225° (тогда тангенсы всех его углов равны 1).

♦ Можно показать, что условие задачи определяет углы четырехугольника однозначно.

▸ **10.3.** См. рис. 11.

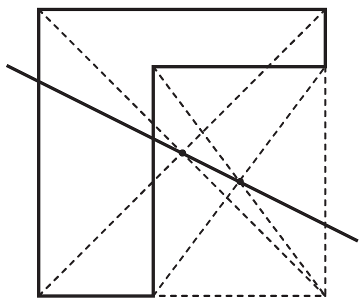


Рис. 11

▸ **10.4.** *Ответ.* 10%. Из условия следует, что 30% участников не потеряли глаз, 25% не потеряли ухо, 20% остались с рукой и 15% остались с ногой. Значит, число участников, которые сохранили глаз или ухо, или руку, или, на худой конец, ногу, не может превышать $30\% + 25\% + 20\% + 15\% = 90\%$. Следовательно, число ветеранов, оставшихся одновременно без глаза, уха, руки и ноги не меньше 10%. Причем, этот минимум может достигаться, только если упомянутые множества из 30%, 25%, 20% и 15% не пересекаются, т. е. каждый из них сохранил только одну часть тела, а три другие потерял.

▸**10.5.** *Ответ.* Второе число больше. Преобразуем разность этих чисел:

$$\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ} - \frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ} = \frac{\sin 1^\circ \sin 4^\circ - \sin 2^\circ \sin 3^\circ}{\sin 2^\circ \sin 4^\circ} = \\ = \frac{\frac{1}{2}(\cos 3^\circ - \cos 5^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 1^\circ - \cos 5^\circ)}{\sin 2^\circ \sin 4^\circ} = \\ = \frac{\cos 3^\circ - \cos 1^\circ}{2\sin 2^\circ \sin 4^\circ} = -\frac{2\sin 1^\circ \sin 2^\circ}{2\sin 2^\circ \sin 4^\circ} = -\frac{\sin 1^\circ}{\sin 4^\circ} < 0,$$

так как $\sin 1^\circ$ и $\sin 4^\circ$ положительные.

▸**10.6.** *Ответ.* 27. Запишем уравнение в виде

$$(a-1)(b-1)(c-1) = 2006.$$

Все множители слева неотрицательны и нулем быть не могут, значит, они натуральные. 2006 расскладывается на простые множители как $2 \cdot 17 \cdot 59$. Распределим эти множители по трем скобкам. Каждый множитель можно распределить тремя способами, так что всего получается $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ способов.

▸**10.7.** *Ответ.* $1 + \sqrt{2}$. Пусть 2φ — угол, под которым из точки O видна сторона квадрата с вершинами на окружности, r — расстояние от центра окружности до вершин квадрата, не лежащих на окружности. Тогда

$$r^2 = \sin^2\varphi + (\cos\varphi + 2\sin\varphi)^2 = 1 + 2\sin 2\varphi + 4\sin^2\varphi = \\ = 3 + 2(\sin 2\varphi - \cos 2\varphi) = 3 + 2\sqrt{2}\sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 3 + 2\sqrt{2},$$

при этом наибольшее значение r^2 достигается при $\varphi = \dfrac{3\pi}{8}$, следовательно, $r_{\max} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

▸**10.8.** *Ответ.* $1 \leqslant n \leqslant 35$. Легко проверить, что для однозначного n неравенство выполнено. В то же время для трехзначного или более оно не выполнено, так как сумма только целых частей $1 + \ldots + 100$ уже больше, чем нужно. Найдем наибольшее возможное двузначное n.

Сумма целых частей равна $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Сумма дробных частей равна

$$\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \ldots + \frac{9}{9} + \frac{10}{99} + \frac{11}{99} + \ldots + \frac{n}{99} = 5 + \frac{(10+n)(n-9)}{2 \cdot 99}.$$

Имеем неравенство

$$\frac{n(n+1)}{2} + 5 + \frac{(n+10)(n-9)}{2 \cdot 99} < 677\frac{27}{99},$$

или после упрощения

$$n(n+1) < 1332.$$

При $n = 36$ неравенство обращается в равенство, поэтому $n < 36$.

▸**10.9.** *Ответ.* $3803 \cdot 3607$. Обозначим $13717421 = x$. Тогда

$$x \cdot 1390^2 - x \cdot 1370^2 = (761^2 + 7 \cdot 1370^2) \cdot 1390^2 - (439^2 + 7 \cdot 1390^2) \cdot 1370^2,$$
$$x \cdot (1390^2 - 1370^2) = 761^2 \cdot 1390^2 - 439^2 \cdot 1370^2,$$
$$x \cdot 20 \cdot 2760 = (761 \cdot 1390 - 439 \cdot 1370)(761 \cdot 1390 + 439 \cdot 1370),$$
$$x \cdot 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23 = 456360 \cdot 1659220.$$

Теперь осталось сократить на простые множители слева. Получим $x = 3803 \cdot 3607$. (Эти числа простые, так что дальше разложить уже нельзя.)

▸**10.10.** *Ответ.* Нет, не может. Докажем методом от противного два утверждения: 1) если число k — хорошее, то число $k+3$ также хорошее; 2) если число k — плохое, то число $k+3$ также плохое.

В первом случае, пусть число k — хорошее, а $k+3$ — плохое. Тогда число $k+18$ одновременно должно быть и хорошим, и плохим — противоречие. Во втором случае, если число k — плохое, а число $k+3$ — хорошее, то число $k+15$ одновременно является и хорошим, и плохим, чего быть не может. Поскольку разность между 1000 и 1 делится на 3, то эти числа должны быть либо оба хорошие, либо оба плохие.

▸**11.1.** Идея заключается в том, чтобы построить прямую, параллельную данной и проходящую через данную точку. Пусть дана прямая ℓ и точка A вне ее. Последовательность построения может быть такой (см. рис. 12).

1) Берем произвольную точку B на прямой ℓ.

2) Строим препендикуляр к AB в точке A, получаем точку C.

3) Аналогично строим перпендикуляры из B и C, чтобы получить точку D.

4) Так как $ABDC$ — прямоугольник, то его диагонали точкой пересечения O делятся пополам.

5) Из точки O восстанавливаем перпендикуляр к прямой ℓ, получаем точку M.

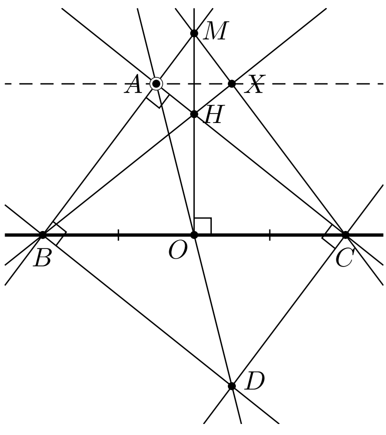


Рис. 12

6) Треугольник BMC — равнобедренный, поэтому, проведя прямую через точку H (пересечения AC и OM) и точку B, при пересечении с CM получим точку X, симметричную A относительно OM. Значит, $AX \parallel \ell$.

▸**11.2.** *Ответ.* x — любое число. Покажем, что это уравнение на самом деле является тождеством. Обозначим $[x]=n$.

1) Если $0\leqslant\{x\}<\dfrac{1}{3}$, то

$$\left[x+\frac{1}{3}\right]=\Bigl[n+\underbrace{\{x\}+\frac{1}{3}}_{\text{меньше 1}}\Bigr]=n,\quad \left[x+\frac{2}{3}\right]=\Bigl[n+\underbrace{\{x\}+\frac{2}{3}}_{\text{меньше 1}}\Bigr]=n,$$

$$[3x]=\bigl[3n+\underbrace{3\{x\}}_{\text{меньше 1}}\bigr]=3n.$$

Таким образом, равенство выполнено: $n+n=3n-n$.

2) Если $\dfrac{1}{3}\leqslant\{x\}<\dfrac{2}{3}$, то, аналогично,

$$\left[x+\frac{1}{3}\right]=n,\quad \left[x+\frac{2}{3}\right]=n+1,\quad [3x]=3n+1\quad (\text{ведь } 1\leqslant 3\{x\}<2).$$

Равенство выполнено: $n+(n+1)=(3n+1)-n$.

3) Если $\dfrac{2}{3}\leqslant\{x\}<1$, то, аналогично,

$$\left[x+\frac{1}{3}\right]=n+1,\quad \left[x+\frac{2}{3}\right]=n+1,\quad [3x]=3n+2\quad (\text{ведь } 2\leqslant 3\{x\}<3).$$

Равенство выполнено: $(n+1)+(n+1)=(3n+2)-n$.

▸**11.3.** Левая часть равна $\cos^2 2006+\sin^2 2007$. Если заменить $\cos^2 2006$ на $\cos^2 2007$, то выражение станет равно 1. Сравним $\cos^2 2006$ и $\cos^2 2007$ и, тем самым, выясним, увеличивается или уменьшается левая часть при замене.

Чтобы узнать, в какой четверти лежат углы в 2006 и 2007 радиан, нужно найти остаток от деления на 2π. Поскольку $\dfrac{2006}{2\pi}\approx 319{,}26$ и $\dfrac{2007}{2\pi}\approx$ $\approx 319{,}42$, т. е. дробная часть лежит в промежутке $(1/4;1/2)$, то оба угла попадают во вторую четверть. Во второй четверти cos убывает и отрицателен, поэтому $0>\cos 2006>\cos 2007$, следовательно, $\cos^2 2006<\cos^2 2007$. Таким образом, при замене $\cos^2 2006$ на $\cos^2 2007$ левая часть увеличивается, значит, в исходном варианте левая часть меньше 1.

▸**11.4.** Подставим в равенство $x=0$ и $y=0$, получим: $f(0)g(0)=1$ $(*)$. Если подставить только $y=0$, а потом только $x=0$, не трогая другую переменную, получим: $f(x)g(0)=bx+1$ и $f(0)g(y)=cy+1$. Перемножим последние два равенства, учитывая $(*)$:

$$f(x)g(y)f(0)g(0)=(bx+1)(cy+1),$$
$$f(x)g(y)=bcxy+bx+cy+1.$$

Поскольку последнее равенство выполнено для любых x и y, то, сравнивая его с исходным, получаем, что это возможно только при $a = bc$. (Действительно, вычтя одно из другого, слева и справа должен получиться тождественный нуль.)

▸**11.5.** См. решение задачи 9.10.

▸**11.6.** *Ответ.* $\frac{1}{4}$. Существует угол φ, для которого $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$. Тогда

$$a^3b - b^3a = ab(a^2 - b^2) = \cos\varphi \sin\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \frac{1}{4}\sin 4\varphi.$$

Максимум достигается при $\sin 4\varphi = 1$.

▸**11.7.** *Ответ.* $(0, 0, 0)$, $(2, 2, 0)$, $(2, 0, 2)$, $(0, 2, 2)$. Обозначим $\bar{a} = 1 - a$ и заметим, что $\overline{a \circ b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$. Таким образом, $\circ$ — обычная операция умножения, но над «исправленными» числами. Приведенное в условии уравнение превращается в $\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = \bar{0} = 1$. Отсюда либо $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 1$, то есть $x = y = z = 0$, либо два из чисел $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ равны -1, а третье равно 1.

▸**11.8.** *Ответ.* 14. Пусть a — основание системы счисления. Данное в условии число представимо в виде

$$\begin{aligned}1 + a^2 + a^3 + \ldots + a^{n+1} + a^{n+3} = 1 + a^2\frac{a^n - 1}{a - 1} + a^{n+3} =\\ = \frac{a^{n+4} - a^{n+3} + a^{n+2} - a^2 + a - 1}{a - 1} = \frac{(a^2 - a + 1)(a^{n+2} - 1)}{a - 1} =\\ = (a^2 - a + 1)(a^{n+1} + a^n + \ldots + a + 1).\end{aligned}$$

Получившееся выражение делится на 61 независимо от n, следовательно, число $a^2 - a + 1$ кратно 61. Это возможно при наименьшем основании системы счисления a, равном 14.

▸**11.9.** *Ответ.* Существуют, например, 1, 2, 3, 6, 12, 24, … (первые три числа 1, 2, 3, а каждое следующее в два раза больше предыдущего). Последнее, 2007-е число, будет равно $3 \cdot 2^{2004}$. Как нетрудно проверить, каждое следующее число, начиная с 4-го, равно сумме всех предыдущих. Поэтому, если выбрать какое-то из этих чисел (кроме 1, 2 и 3), то сумма предыдущих делится на него, и кажое последующее тоже делится на него. Стало быть, сумма всех чисел, кроме выбранного, делится на выбранное число. Для чисел 1, 2 и 3, проверка тривиальна.

▸**11.10.** *Ответ.* Цифра 3. Пусть при некотором n 5^n и 2^n начинаются на цифру k. Тогда $k \cdot 10^x < 5^n < (k + 1) \cdot 10^x$ и $k \cdot 10^y < 2^n < (k + 1) \cdot 10^y$. Перемножим эти неравенства:

$$k^2 \cdot 10^{x+y} < 10^n < (k + 1)^2 \cdot 10^{x+y}, \text{ откуда } k^2 < 10^{n-x-y} < (k + 1)^2.$$

Получается, что какая-то степень десятки расположена между двумя последовательными квадратами. Учитывая, что k — цифра, это возможно только для $3^2 < 10 < 4^2$, следовательно, $k = 3$.

Задача в подарок

Известно, что $a < 3b$ и $a < \dfrac{1}{2}$. Докажите, что $a - b < \dfrac{1}{3}$.

Решение. Так как $b > \dfrac{a}{3}$, то $a - b < a - \dfrac{a}{3} = \dfrac{2}{3}a < \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.