Материалы заданий с ответами

олимпиады школьников по математике «САММАТ - 2010»

7 КЛАСС

▷ **1.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$HOK(x, y) = HOK(201, 209),$$

где HOK - наименьшее общее кратное двух чисел?

Ответ: 81.

▷ **2.** В треугольнике ABC известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. На сторонах взяты точки K, L, M так, что прямые KL, ML, MK перпендикулярны соответственно биссектрисам углов ABC, BCA, CAB. Найти длины отрезков, на которые указанные точки делят стороны треугольника.

Ответ: $AK = AM = 3, MC = CL = 4, BL = BK = 2$.

▷ **3.** Юра задумал натуральное число, умножил его на 13, зачеркнул последнюю цифру результата, полученное число умножил на 7, опять зачеркнул последнюю цифру результата и получил число 21. Какое число задумал Юра?

Ответ: 24.

▷ **4.** На физическом кружке учитель поставил следующий эксперимент. Он разложил на чашечные весы 16 гирек массами 1,2,3,...,16 грамм так, что одна из чаш перевесила. Пятнадцать учеников по очереди выходили из класса и забирали с собой по одной гирьке, причем после выхода каждого ученика весы меняли свое положение и перевешивала противоположная чаша весов. Какая гирька могла остаться на весах?

Ответ: на весах осталась гиря массой 1 грамм.

▷ **5.** Карлсон и Малыш гуляли по крышам домов. Длина шага Малыша - 80 см, а Карлсона - 60 см. Их шаги совпали 601 раз, в том числе в самом начале и в конце пути. Какое расстояние они прошли?

Ответ: 1 км 440 м.

▷ **6.** Петя разрезал имеющийся у него прямоугольник на два больших квадрата, три квадрата поменьше и пять маленьких квадратов со стороной 10 см, используя автомат, который может от любого картонного прямоугольника отрезать квадрат со стороной, равной меньшей стороне прямоугольника. Найдите периметр Петиного прямоугольника.

Ответ: 1060 см.

▷ **7.** В треугольнике ABC H - точка пересечения высот AA_1 и BB_1. Найдите угол BAC, если известно, что $AH = BC$.

Ответ: 45^0.

▷ **8.** Сравнив дроби $x = \dfrac{111110}{111111}$, $y = \dfrac{222221}{222223}$, $z = \dfrac{333331}{333333}$, расположите их в порядке возрастания.

Ответ: $x < y < z$.

▷ **9.** Однажды на слете юных математиков за круглым столом оказалось пятеро ребят родом из Москвы, Самары, Саранска, Оренбурга и Саратова: Юра, Толя, Алеша, Коля, и Витя.

Известно, что:

1. Самарец сидел между Юрой и Толей, а напротив сидел юный математик из Оренбурга и Алеша;
2. Коля никогда не был в Самаре;
3. Юра не был в Москве и Саратове;
4. Юный метематик из Саратова и Толя регулярно переписываются.

Определите, в каком городе живет каждый из ребят.

Ответ: Юра живет в Саранске, Толя - в Москве, Алеша - в Саратове, Коля - в Оренбурге, Витя - в Самаре.

$\triangleright$ **10.** Существуют ли такие два ненулевых числа, что их удвоенная разность равна их произведению и их сумме.

Ответ: $4; \dfrac{4}{3}$.

Материалы заданий с ответами

олимпиады школьников по математике «САММАТ - 2010»

8 КЛАСС

▷ **1.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$HOK(x, y) = HOD(1944, 2052),$$

где HOK - наименьшее общее кратное двух чисел, HOD - наибольший общий делитель двух чисел?

Ответ: 35.

▷ **2.** На стороне AC треугольника ABC взяты точки D и E, причем ($AD < AE$). Известно, что некоторые четыре из отрезков AB, BC, CE, DE, AD, BD и BE имеют равные длины. Могут ли три остальных отрезка иметь равные длины?

Ответ: нет.

▷ **3.** На доске выписали в порядке возрастания все числа от 1 до 10000, а потом стерли те, которые не делятся ни на 4, ни на 11. Какое число окажется на 2010 месте?

Ответ: 6314.

▷ **4.** Может ли в остроугольном треугольнике биссектриса быть в два раза больше высоты, проведенной из той же вершины?

Ответ: Не может.

▷ **5.** Каких пятизначных чисел больше: четных с суммой цифр, равной 36, или нечетных с суммой цифр равной 38? Обоснуйте ответ.

Ответ:Первых меньше чем вторых.

▷ **6.** Сто чудаков последовательно красят доску 100×100, используя 100 цветов. Они соблюдают единственное правило: в одной строке и в одном столбце не может оказаться двух клеток, раскрашенных одинаково. Смогут ли 99 чудаков правильно докрасить доску, если первый чудак уже раскрасил «свои» 100 клеток?

Ответ: Нет, не смогут.

▷ **7.** Найдите все несократимые дроби со знаменателем 2010, заключенные между числами $\dfrac{13}{120}$ и $\dfrac{14}{120}$.

Ответ: $\dfrac{221}{2010}, \dfrac{223}{2010}, \dfrac{227}{2010}, \dfrac{229}{2010}, \dfrac{233}{2010}$.

▷ **8.** Решить уравнение $n^2 - 7p^m = 1$ в целых числах.

Ответ: $n = 8, m = 2, p = 3$; $n = 6, m = 1, p = 5$.

▷ **9.** В некотором простом двузначном числе поменяли местами цифры и сложили полученное число с исходным. Получился точный квадрат. Найдите все такие числа.

Ответ: 29, 47, 83.

▷ **10.** В урне находится одинаковое число белых и черных шаров. $2k$ черных шаров выбросили, а из оставшихся в урне шаров k белых шаров перекрасили в черный цвет. Увеличилась или уменьшилась доля черных шаров в урне.

Ответ: не изменилось.

Материалы заданий с ответами

олимпиады школьников по математике «САММАТ - 2010»

9 КЛАСС

▷ **1.** Шестизначное число A делится на 17, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 13. Найти наибольшее и наименьшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.

Ответ: 999838; 100232.

▷ **2.** Решите уравнение $x^2 - 4x \cdot \cos \pi x^3 + 4 = 0$.

Ответ: 2.

▷ **3.** В треугольнике ABC на сторонах AB, BC, AC соответственно отмечены точки M, N, P так, что четырехугольник $AMNP$ - параллелограмм. Найти площадь треугольника ABC, если площади треугольников MBN и PNC равны S_1 и S_2.

Ответ: $S_{ABC} = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$

▷ **4.** Решить уравнение $x + y + z = 2\sqrt{x-6} + 4\sqrt{y-5} + 6\sqrt{z-3}$.

Ответ: 7, 9, 12.

▷ **5.** AM — медиана треугольника ABC, а K и L — точки пересечения медианы AM с вписанной в треугольник ABC окружностью, K лежит между A и L. При этом $AK = KL = LM$. Докажите что стороны треугольника ABC соотносятся как $5 : 10 : 13$ (в каком то порядке).

Решение: Обозначим точки касания окружности со сторонами AB, BC и CA через C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть точка A_1 лежит между B и M (случай, когда точка A_1 лежит между C и M рассматривается аналогично). Пусть $AC_1 = AB_1 = x, BA_1 = BC_1 = y, CB_1 = CA_1 = z, AK = KL = LM = t$. По свойству секущей и касательной $|ML| \cdot |MK| = |MA_1|^2$, откуда $|MA_1|^2 = 2t^2$. Аналогично $|AK| \cdot |AL| = |AB_1|^2$ и $x^2 = |AB_1|^2 = 2t^2$. В итоге $|MA_1| = x$. Так как M — середина BC, то $|BA_1| + |A_1M| = |MC|$, т.е. $y + x = z - x$ и $z = y + 2x$. Итак, $|AB| = x + y, |BC| = y + z = 2x + 2y, |CA| = z + x = 3x + y$. Кроме того $|AM| = 3t$ и $2t^2 = x^2$. Применяя теорему косинусов к треугольникам BMA и CMA, получим равенства ($\cos \angle BMA = d$):

$$|BA|^2 = |MA|^2 + |MB|^2 - 2|MA| \cdot |MB| \cdot d$$

и

$$|CA|^2 = |MA|^2 + |MC|^2 + 2|MA| \cdot |MC| \cdot d,$$

складывая которые получим

$$(y + x)^2 + (y + 3x)^2 = (3t)^2 + (y + x)^2 + (3t)^2 + (y + x)^2,$$

или, используя равенство $2t^2 = x^2$ и деля на x^2,

$$\left(\frac{y}{x} + 3\right)^2 = 9 + \left(\frac{y}{x} + 1\right)^2.$$

Из последнего уравнения легко найти, что

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{4} \text{ или } x = 4y.$$

Окончательно

$$|AB| = 5y, \ |BC| = 10y, \ |CA| = 13y.$$

▷ **6.** Решить систему $\begin{cases} [x] - \{x + y\} = 20,09, \\ [x + y] - \{y\} = 20,11, \end{cases}$ где $[x]$ - целая часть числа x, $\{x\}$ - дробная часть числа x.

Ответ: $x = 21,02; y = 0,89$.

▷ **7.** Все натуральные числа от 1 до 2010 записали в следующем порядке: сперва записали в порядке возрастания все числа, сумма цифр которых равна 1. Затем все числа с суммой цифр 2 (также в порядке возрастания), потом - все числа с суммой 3 (также в порядке возрастания), и т.д. Какое число стоит на 1993 месте.

Ответ: 1969.

▷ **8.** Многочлен $P(x)$ при делении на $x^4 + x^2 + 1$ дает остаток $x^3 + x$. Какой остаток будет получен при делении этого многочлена на $x^2 + x + 1$?

Ответ: $x + 1$.

▷ **9.** Мамаша семейки Симпсон собирается закупить фрукты для своей семейки. Согласно диетическим нормативам, ежедневная порция фруктов на одного члена семьи должна содержать не менее 3 г витамина С и 2 г витамина А. У мамаши имеется возможность закупить апельсины по цене 5 долларов за один килограмм и яблоки по цене 4 доллара за один килограмм. Содержимое витаминов в этих фруктах приведено в таблице.

Витамины	Апельсины	Яблоки
А	2%	1%
С	1%	3%

Сколько граммов апельсинов и яблок должна содержать ежедневная порция одного члена семейки, чтобы удовлетворять диетическим нормативам и при этом стоимость порции была бы наименьшей?

Ответ: 60 г апельсинов, 80 г яблок ежедневная порция одного члена семейки.

▷ **10.** Дан отрезок длиной $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ с помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной 1.

Указания: Рассмотрим $a = \sqrt{2 - \sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{4 - 2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{3} - 1)^2}{2}} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

$$a \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}} = 1,$$

$$\sqrt{2a^2 + \sqrt{3}a^2} = 1.$$

Материалы заданий с ответами

олимпиады школьников по математике «САММАТ - 2010»

10 КЛАСС

▷ **1.** Ежедневно в гипермаркет «Перекресток» поставляется одним видом транспорта 12 т картофеля из трех хозяйств: из первого - по цене 4000 р. за 1 т, из второго - по цене 3000 р. за 1 т., из третьего по 1000 р. Чтобы поставка картофеля в магазин была произведена вовремя, необходимо на погрузку требуемых 12 т затратить 40 мин. Известно, что в первом хозяйстве уровень механизации позволяет погрузку 1 т производить за 1 мин, во втором - за 4 мин, в третьем - за 3 мин. Производственные мощности этих хозяйств выглядят так: первое хозяйство должно ежедневно выделять дял поставки в город не менее 10 т , второе - не более 8 т, третье - не более 6 т картофеля. Как распределить заказы на поставки 12 т между хозяйствами, чтобы общая стоимость привозимого в город картофеля была минимальной.

Ответ: из первого хозяйства привозить 10 **т, из второго -** 0 **т, из третьего -** 2 **т;** 42 **- стоимость.**

▷ **2.** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1{,}1, \\ \{x\} + y + [z] = 2{,}2, \\ [x] + \{y\} + z = 3{,}3. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ и $\{x\}$ — соответственно целая и дробная части x.

Ответ: $x = 1$**,** $y = 0{,}2$**,** $z = 2{,}1$**.**

▷ **3.** Натуральные числа α и β таковы, что

$$\frac{43}{197} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{17}{77}.$$

Найдите наименьшее возможное значение β.

Ответ: $\beta = 32$.

▷ **4.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$НОК(x; y) = НОК(1993; 2010)?$$

Ответ: 243.

▷ **5.** Шестизначное число A делится на 13, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 17. Найти наименьшее число A, удовлетворяющее этим требованиям.

Ответ: 100139.

▷ **6.** Найти все решения неравенства

$$x + y + z \le \sqrt{x + y - 6} + 2\sqrt{y + z - 5} + 3\sqrt{z + x - 3}.$$

Ответ: 5, 2, 7.

▷ **7.** Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^3 - 670x^2 + 2010x + a = 0$$

имеет три различных корня, образующих геометрическую прогрессию.

Ответ: $a = -27$.

▷ **8.** Найдите наибольшее значение выражения $x^2+y^2+z^2+w^2$, если x,y,z,w удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x=4y+11, \\ z^2+w^2+2w=2z+167, \\ xw+zy+w+x \geq 49+2z+y. \end{cases}$$

Ответ: $192+2\sqrt{314}$.

▷ **9.** Докажите, что уравнение $x^3-y^3=2010$ не имеет решений в натуральных числах.
Решение: Преобразуем исходное уравнение к следующему виду:

$$(x-y)((x-y)^2+3xy)=2010.$$

В случае, если $x-y$ не делится на 3, левая часть уравнения также делится на 3, но $2010=3\cdot 670$. Если же $x-y=3k$, то $(x-y)((x-y)^2+3xy)=3k(9k^2+3xy)=9(3k^3+kxy)$, но 2010 не делится на 9.

▷ **10.** Два одинаковых куба либо соприкасаются, либо имеют общую часть. По трем проекциям (спереди, слева и сверху) полученной фигуры изобразите ее и найдите её объем.(Рис. 1.)

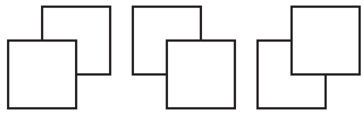

Рис. 1

Ответ: $\dfrac{a^3}{8}$.

Материалы заданий с ответами

олимпиады школьников по математике «САММАТ - 2010»

11 КЛАСС

▷ **1.** Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$HOK(x;y) = HOK(2009;2010)?$$

Ответ: $3^5 \cdot 5 = 1215$**.**

▷ **2.** Известно, что $3x + y \geqslant 13$. Докажите, что $4x^2 + y^2 \geqslant 52$.

Решение: Неравенство $13(4x^2 + y^2) \geqslant 4(3x + y)^2$ выполнено для всех x, y. Оно сводится к неравенству $(4x - 3y)^2 \geqslant 0$. Отсюда

$$4x^2 + y^2 \geqslant \frac{4}{13}(3x + y)^2 \geqslant \frac{4}{13} \cdot 13^2 = 52.$$

▷ **3.** Можно ли в единичном квадрате разместить без пересечений восемь правильных треугольников со стороной $\frac{4}{9}$?

Ответ: Можно.

▷ **4.** Решить систему

$$\begin{cases} [x + y] - \{y + z\} = 20,09, \\ [y + z] - \{z + x\} = 20,(10), \\ [z + x] - \{x + y\} = 20,11 \end{cases}$$

где $[x]$ - целая часть числа x, $\{x\}$ - дробная часть числа x.

Ответ: $x = 10,(93); y = 10,(94); z = 10,(95)$.

▷ **5.** Найдите все целые решения неравенства

$$x^{2011} + x^{2009} \geq \sqrt[2010]{2008 - 2007x} + 1.$$

Ответ: 1.

▷ **6.** Расположить на плоскости четыре точки так, чтобы все попарные расстояния между ними принимали только два значения $\sqrt{10}$ и $\sqrt{20}$. Найдите все виды таких расположений.

Ответ: вершины квадрата.

▷ **7.** На первый курс механико-математического факультета поступило не более 220 студентов, но и не менее 140. Причем половина из них были медалисты. После первой сессии 30 студентов были отчислены за неуспеваемость и число медалистов сократилось на 6%. Сколько студентов начали обучение на первом курсе и сколько медалистов было отпо итогам первой сессии.

Ответ: 200, 6.

▷ **8.** Докажите, что число

$$1403^{2010} - 2010^{1403}$$

составное.

Решение: Так как $x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + ... + y^{n-1})$, то, если $x - y$ делится на m, то $x^n - y^n$ делится на m. В силу равенства

$$1403^{2010} - 2010^{1403} = 1403^{2010} - 1 - (2010^{1403} - 1),$$

достаточно показать, что $1403^{2010}-1$ и $2010^{1403}-1$ оба делятся на одно и то же простое число p, не совпадающее с исходным числом. Покажем, что в качестве такого p можно взять число 7. Действительно, $2010-1=2009=7\cdot 287$ и $2010^{1403}-1^{1403}$ также делится на 7. Далее,

$$1403^{2010}-1=(1403^6)^{335}-1^{335}=(1403^6-1)A=$$

$$=(1403^6-3^6+728)A=((1403-3)B+7\cdot 104)A=7N.$$

Остается показать, что $1403^{2010}-2010^{1403}$ больше 7. Так как $1403>2^{10}$, а $2010<2^{11}$, то

$$1403^{2010}-2010^{1403}>2^{20100}-2^{15433}>2^{15433}>7.$$

▷ **9.** Дан отрезок длиной $\sqrt[32]{33}$ см. С помощью циркуля и линейки постройте отрезок длиной 31 см.

Указание: Пусть $x=\sqrt[32]{33}$, тогда можно построить отрезок $4x$, а следовательно и отрезок $\sqrt{17}x=\sqrt{(x)^2+(4x)^2}$.

$a=\sqrt{(4x)^2+(\sqrt{(17)}x)^2}=\sqrt{16x^2+17x^2}=\sqrt{33}x=33^{\frac{17}{32}}$,

$b=\sqrt{(4a)^2+(\sqrt{(17)}a)^2}=\sqrt{16a^2+17a^2}=\sqrt{33}a=33x$,

$c=\sqrt{a\cdot x}=33\dfrac{9}{32}$,

$d=\sqrt{x\cdot c}=33^{\frac{5}{32}}$,

$e=\sqrt{x\cdot d}=33^{\frac{3}{32}}$,

$m=\sqrt{b\cdot d}=33^{\frac{19}{32}}$,

$n=\sqrt{a\cdot c}=33^{\frac{13}{32}}$,

$f=\sqrt{m\cdot n}=33^{\frac{1}{2}}$,

$y=\sqrt{(4f)^2+(\sqrt{17}f)^2}=33$.

Используя теорему Фалеса можно построить отрезок длиной 31.

▷ **10.** Проекция некоторого многогранника на три взаимоперпендикулярные плоскости имеет вид: Рис. 2 (вид спереди, вид справа, вид сверху соответственно). Докажите, что в этот многогранник можно вписать шар и если это возможно найдите радиус этого шара.

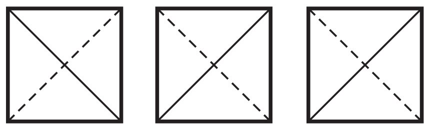

Рис. 2

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{12}}$, $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.