XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

6 класс

▷ **1.** На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2015 — часть чисел красным мелом, часть — синим. Наибольшее синее число равно количеству синих чисел, наименьшее красное число равно количеству красных чисел. Сколько красных чисел написано на доске?

Ответ: 1008 (10 баллов)

▷ **2.** Может ли каждый ученик дружить ровно с пятью одноклассниками, если в классе 33 человека?

Ответ: нет (10 баллов)

▷ **3.** Некий леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: "В нашем лесу 99% сосны. После рубки сосна будет составлять 98% всех деревьев". Какое наименьшее количество деревьев может остаться?

Ответ: 50 деревьев=49 сосен и 1 береза (10 баллов)

▷ **4.** В десятичной записи числа $\frac{1}{7}$ зачеркнули 2015-ю цифру после запятой (а другие цифры не меняли). Как изменилось число? (Увеличилось или уменьшилось?)

Ответ: уменьшилось (10 баллов)

▷ **5.** В обменном пункте совершаются операции двух типов:

1) дай 2 евро — получи 3 доллара и конфету в подарок;

2) дай 5 долларов — получи 3 евро и конфету в подарок.

Когда богатенький Буратино пришел в обменник, у него были только доллары. Когда ушел — долларов стало поменьше, евро так и не появились, зато он получил 50 конфет. Во сколько долларов обошелся Буратино такой "подарок"?

Ответ: 10 долларов (10 баллов)

▷ **6.** Найдите произведение $O \cdot X \cdot A$, если известно, что $XAXAXA + XOXOXO$ делится на 2015.

Ответ: 378 (10 баллов)

▷ **7.** У ромашки n лепестков. За ход разрешается оторвать либо один, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выигрывает при правильной игре, если а) $n = 20$; б) $n = 15$?

Ответ: а) второй; б) второй (10 баллов)

▷ **8.** Первоклассник Вова знает только цифру 1. Докажите, что он может написать число а) делящееся на 7; б) делящееся на 13; в) делящееся на 31.

Ответ: а) 111111; б) 111111; в) 111111111111111 (15 цифр) (10 баллов)

▷ **9.** В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, то общий доход всей семьи возрастет на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату — то на 15%, если же зарплату удвоят папе — то на 25%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

Ответ: 55% (10 баллов)

▷ **10.** Дано 2015 спичек. Играют два шестиклассника, ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий забирает не более шести, но не менее одной спички. Выигравшим считается тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре?

Ответ: выиграет первый. Первый ход 6 спичек (10 баллов)

XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

7 класс

▷ **1.** Докажите, что уравнение $2x^2 = y^2 + z^2$ имеет более 2015 решений в целых числах, если y отлично от z.

Ответ: (5;7;1) Ч решение. Т.к. Для $\forall n(5n; 7n; n)$ Ч точное решение, то утверждение доказано (10 баллов)

▷ **2.** У Змея Горыныча 2015 голов. Богатырь может срубить одним ударом 33, 21, 19 или 1 голову, но при этом соответственно вырастают 48, 0, 16, 349 голов. Сможет ли богатырь победить Змея Горыныча?

Ответ: нет, не сможет (10 баллов)

▷ **3.** На столе лежит 200 спичек. Играют два семиклассника, ходят по очереди. Ход состоит в том, что разрешается взять со стола не более семи спичек, но и не менее одной. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выиграет при правильной игре? (А если спичек 199?)

Ответ: второй (10 баллов)

▷ **4.** На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2015 — часть чисел красным мелом, часть — синим. Наибольшее синее число равно количеству синих чисел, наименьшее красное число — в два раза меньше количества красных чисел. Сколько красных чисел написано на доске?

Ответ: 1344 (10 баллов)

▷ **5.** У Попа больше земли, чем у Балды, на 90 квадратных аршинов. Каждый год Поп и Балда одновременно обмениваются землей: Поп отдает Балде треть своего надела, и Балда отдает Попу треть своего. У кого из них будет больше земли через 5 лет и на сколько?

Ответ: Больше земли будет у попа, на $\frac{10}{27}$ (10 баллов)

▷ **6.** Может ли каждый студент факультета прикладной математики иметь на факультете ровно 13 друзей, если всего студентов 2015?

Ответ: нет (10 баллов)

▷ **7.** Первоклассник Вова знает только цифру 5. Докажите, что он может написать число, делящееся на 2015.

Ответ: $\underbrace{55...5}_{n} = a_n \vdots 5$; $a_n \vdots 403$

$a_1, a_2, ..., a_{404} = \underbrace{55...5}_{404}$

$\exists$ два a_i и a_j

$$a_i = N_1 \cdot 403 + r_1, 0 \leq r_1 \leq 402$$

$$a_j = N_2 \cdot 403 + r_2, 0 \leq r_2 \leq 402$$

$\exists$ такие a_i и a_j, что $r_1 = r_2$, тогда

$$a_i - a_j = \underbrace{55...5}_{i} - \underbrace{55...5}_{j} = \underbrace{55...5}_{i-j}\underbrace{00...0}_{j} = \underbrace{55...5}_{i-j} \cdot 10^j = a_{i-j} \cdot 10^j$$

$$a_{i-j} \vdots 5$$

$$a_{i-j} \vdots 403$$

$$a_{i-j} \vdots 2015$$

(10 баллов)

$\triangleright$ **8.** Буратино, спасаясь от преследования Дуремара, пробежал уже $\frac{1}{5}$ км. Если ему удастся пробежать 40% этого, то до укрытия под мостом останется всего $\frac{3}{7}$ того, что он пробежал. Сколько осталось пробежать Буратино?

Ответ: еще 200 м (10 баллов)

$\triangleright$ **9.** В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, то общий доход всей семьи возрастет на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату — то на 15%, если же зарплату удвоят папе — то на 25%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?

Ответ: на 55% (10 баллов)

$\triangleright$ **10.** Последовательность чисел строится по следующему закону. На первом месте стоит число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадрата, увеличенная на единицу. Например, на втором месте стоит число 14, так как $7^2 = 49$, а $4 + 9 + 1 = 14$. На третьем месте стоит число 17 и так далее. Какое число стоит на 2014-м месте?

Ответ: 11 (10 баллов)

XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

8 класс

▷ **1.** Докажите, что при любом $n > 1$ число $2^{2^n} + 2^{2^{n-1}} + 1$ — составное.

Ответ:

$$2^{2^{n-1}=x^2}, x = 2^{2^{n-2}}, x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

(10 баллов)

▷ **2.** Придумайте наибольшее (и наименьшее) число, делящееся на 11, в записи которого используются все десять цифр по одному разу.

Ответ: 9875634120, 1024375869 (10 баллов)

▷ **3.** В двух противоположных углах коробки размером 30см×30см×10см сидят муха и паук. Паук может двигаться к мухе кратчайшим путем двумя способами: по двум боковым граням или сначала по боковой, потом по верхней грани. Какой из этих путей короче?

Ответ: второй (10 баллов)

▷ **4.** На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2015 — часть чисел красным мелом, часть — синим. Наибольшее синее число равно количеству синих чисел, наименьшее красное число в семь раз меньше количества красных чисел. Сколько красных чисел написано на доске?

Ответ: 1764 (10 баллов)

▷ **5.** У короля было 4 сына и 864 млн. фартингов. Король поделил все свои миллионы между сыновьями. Сыновья его поехали в разные страны. Первый в пути 6 млн. потерял, второй 6 млн. заработал, у третьего миллионов в два раза больше стало, а у четвертого в два раза меньше. Через три года оказалось, что у всех миллионов осталось поровну. Сколько?

Ответ: 192 млн фартингов (10 баллов)

▷ **6.** На какую наибольшую степень тройки делится произведение $3 \cdot 33 \cdot \cdot 333 \cdot \ldots \cdot 3333333333$? (В последнем множителе 10 троек.)

Ответ: 14 степень (10 баллов)

▷ **7.** Найдите произведение $O \cdot X \cdot A$, если известно, что $XAXAXA + XOXOXO$ делится на 2015.

Ответ: 378 (10 баллов)

▷ **8.** В шахматном турнире участвовало 20 школьников. Каждый сыграл с каждым по одной партии. После окончания турнира оказалось, что ровно один ученик набрал 9,5 очков и он занял девятнадцатое место. Мог ли победитель турнира обойти игрока, занявшего второе место, на 1 очко?

Ответ: не мог (10 баллов)

▷ **9.** Четыре коммерческих банка вкладывают деньги в предприятие. Если бы только первый банк удвоил сумму своего вклада, то всего в предприятия банками окажутся вложенными 11 млн. рублей, если это сделает только второй банк — 12 млн., если только третий — 13 млн., а если только четвертый — 14 млн. рублей. Сколько денег вложил в предприятие каждый банк?

Ответ: 1,2,3,4 млн руб. (10 баллов)

$\triangleright$ **10.** На клетчатой бумаге отметили 5 точек, расположенных в узлах клеток. Доказать, что хотя бы один из отрезков, соединяющих эти точки, проходит через узел клетки.

Ответ: Принцип Дирихле. Введчм на клетчатой бумаге систему координат с началом координат в одном из узлов, осями, направленными вдоль линий сетки, и единичным отрезком, равным стороне клетки. Тогда все отмеченные точки будут иметь целочисленные координаты. Покажем, что найдутся две точки из пяти, у которых одна и та же ччтность координат x и координат y. "Зайцами"у нас будут точки, а "клетками пары (Ч, Ч), (Ч, Н), (Н, Ч), (Н, Н). Если, например, у точки (x, y) координата x ччтна, а координата y неччтна, то мы еч поместим в "клетку"(Ч, Н). Итак, 5 "зайцев"и 4 "клетки". Пусть $(x_1, y_1)(x_2, y_2)$ - две точки, попавшие в одну "клетку". Середина отрезка, соединяющего эти две точки, имеет координаты $([(x_1 + x_2)/2], [(y_1 + y_2)/2])$, которые являются целыми числами в силу одинаковой ччтности x_1 и x_2, y_1 и y_2. Таким образом, середина этого отрезка лежит в узле сетки, т.е. данный отрезок является искомым.(10 баллов)

XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

9 класс

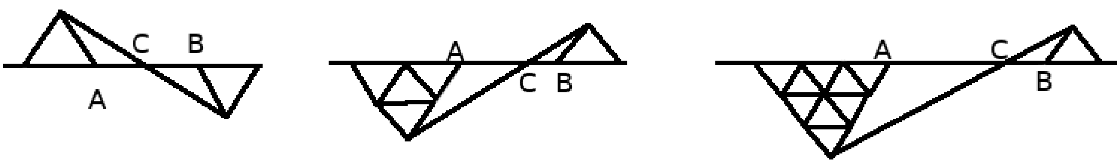
▷ **1.** С помощью любых математических действий и минимального количества цифр 5 представьте число 2015.

Ответ: 8 пятерок(10 баллов); 9 пятерок(8 баллов)

▷ **2.** Разделить данный отрезок а) на два равных отрезка; б) на три равных отрезка; в) на 2015 равных отрезков, пользуясь односторонней линейкой и шаблоном, имеющим форму равностороннего треугольника (шаблон можно обводить по его границе).

Ответ:

а) 6 баллов   б) 8 баллов   10 баллов



▷ **3.** Может ли дискриминант квадратного трехчлена с натуральными коэффициентами $ax^2 + bx + c$ быть равным 1)2013; 2)2014; 3)2015; 4)2016?

Ответ:

1) да: $a = c = 7, \ = 47$

2) нет

3) нет

4) да: $a = c = 5, b = 46$ (10 баллов)

▷ **4.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 + 2x + 2 = 2y(x + z) + 2z \\ (x - 2014)^2 + (y - 2015)^2 + (z - 2016)^2 = 2028 \end{cases}$$

Ответ: (2040,2041,2042);(1988,1989,1990) (10 баллов)

▷ **5.** Доказать, что если y есть среднее арифметическое чисел x и z, то значение выражения $x^4 + 2x^3z - 2xz^3 - z^4 - 4x^2y^2 + 4y^2z^2$ равно нулю.

Ответ: 0 (10 баллов)

▷ **6.** Может ли сумма N последовательных натуральных чисел быть точным квадратом, если а) $N = 2012$; б) $N = 2015$?

Ответ: а) да; б) нет (10 баллов)

▷ **7.** На какую наибольшую степень тройки делится произведение $3 \cdot 33 \cdot \cdot 333 \cdot \ldots \cdot 3333333333$? (В последнем множителе 10 троек.)

Ответ: на 14 степень (10 баллов)

▷ **8.** По кругу висят 250 лампочек. Вначале все лампочки включены. Разрешается либо переключить (из включенного состояния в выключенное или наоборот) любые 4 последовательные лампочки, либо взять 5 последовательных лампочек и переключить все, кроме средней. Можно ли с помощью таких операций выключить все лампочки?

Ответ: нет(10 баллов)

$\triangleright$ **9.** В круг радиуса 3 произвольным образом помещены несколько кругов, сумма радиусов которых равна 25. Доказать, что найдется прямая, которая пересекает не менее девяти из этих кругов.

Ответ: Спроектируем все круги на произвольный диаметр AB большого круга. Сумма длин проекций равна сумме диаметров кругов(50). $50 > 8 \cdot AB = 8 \cdot 6 = 48 \Rightarrow \exists$ на AB точка, принадлежащая проекциям по крайней мере девяти кругов. Прямая, проходящая через эту точку и $\perp AB$ - искомая прямая (10 баллов)

$\triangleright$ **10.** Какое наибольшее число фигур, имеющих форму четверти круга радиуса 1 см, можно разместить без наложения прямогольнике размером 2,15 см $\times$ 4 см?

Ответ: 10 (10 баллов)

XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

10 класс

▷ **1.** С помощью любых математических действий и минимального количества цифр 3 представьте число 2015.

Ответ: 8 троек (10 баллов)

▷ **2.** По крайней мере три из заданных вершин параллелограмма находятся внутри некоторого круга. С помощью линейки найдите его центр.

Ответ: Проведем прямые через две соседние вершины параллелограмма. Эти прямые будут параллельны и пересекут окружность в 4 точках. Эти четыре точки образуют либо прямоуглньник либо равнобедренную трапецию. Для прямоугольника центр находится как пересечение диагоналей. Для трапеции находим точку пересечения диагоналей и точку пересечения боковых сторон. Прямая, соединяющая две эти точки содержит в себе диаметр окружности. Аналогично строим второй диаметр относительно другой пары точек. Точка пересечения диаметров и есть центр окружности. (10 баллов)

▷ **3.** Сколько различных восьмизначных чисел может получиться при перестановке цифр числа 20142015?

Ответ: 3780 (10 баллов)

▷ **4.** Сколько правильных положительных несократимых рациональных дробей со знаменателем 2015 удовлетворяет неравенству

$$\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2} \leq \frac{625}{112} \quad ?$$

Ответ: 1236 (10 баллов)

▷ **5.** Дискриминанты трех квадратных трехчленов ax^2+bx+c, bx^2+cx+a, cx^2+ax+b (a, b и c — целые числа, отличные от нуля) одинаковы и являются кубом некоторого натурального числа N. Найдите наименьшее значение N.

Ответ: 21 (10 баллов)

▷ **6.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+2y^2+z^2+2x+2 = 2y(x+z)+2z \\ (x-2014)^3+(y-2015)^3+(z-2016)^3 = 5184 \end{cases}$$

Ответ: (2026; 2027; 2028) (10 баллов)

▷ **7.** Каждая из 13 прямых разбивает правильный шестиугольник на два пятиугольника, площади которых относятся как 3:4. Докажите, что по крайней мере три из этих 13 прямых проходят через одну точку.

Ответ: Доказательство сводится к получению следующего утверждения: прямая тогда и только тогда разбивает 6-угольник на 2 пятиугольника, площади которых находятся в заданном соотношении, когда она проходит через 1 из 6 определенных точек, принадлежащих этому шестиугольнику, далее применяется принцип Дирихле (10 баллов)

▷ **8.** На доске написаны числа $2, 3, 4, \ldots, 2015$. Разрешается стереть любые два числа, записав вместо них модуль разности их квадратов. Может ли на доске в результате таких операций оказаться один ноль?

Ответ: нет (10 баллов)

▷ **9.** Треугольник имеет целые длины сторон x, y, z, причем известно, что длина одной из его высот равна сумме длин двух других высот. Докажите, что $x^2 + y^2 + z^2$ — квадрат целого числа.

Ответ:

$$\frac{2S}{x} + \frac{2S}{y} = \frac{2S}{z}$$

$$xz + yz = xy$$

$$(x + y - z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy - xz - yz) = x^2 + y^2 + z^2$$

что и требовалось доказать (10 баллов)

▷ **10.** Натуральные числа n и k таковы, что число n^n содержит k цифр, а число k^k содержит n цифр. Найдите n и k.

Ответ: n=k=1; n=k=8; n=k=9 (10 баллов)

XXIII Межрегиональная олимпиада

школьников по математике

«САММАТ-2015»

Заключительный тур

11 класс

▷ **1.** Первоклассник Вова знает только цифру 5. Докажите, что он может написать число, делящееся на 2015. Если возможно, укажите наименьшее такое число.

Ответ: $\underbrace{55...5}_{30}$(10 баллов)

▷ **2.** С помощью любых математических действий и минимального количества единиц представьте число 2015.

Ответ: $(1+1)^{11} - 11(1+1+1)$ (10 баллов)

▷ **3.** Пусть $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что $f(x+g(y)) = 20x+y+15$. Сколько существует натуральных пар (x,y), таких, что $g(x+f(y)) + g(y+f(x)) \leq 10$?

Ответ: 28 (10 баллов)

▷ **4.** По крайней мере три из заданных четырех точек, являющихся серединами сторон некоторого четырехугольника, находятся внутри некоторого круга. С помощью линейки найдите его центр.

Ответ: Очевидно, что середины сторон будут образовывать параллелограмм. Проведем прямые через две соседние вершины параллелограмма. Эти прямые будут параллельны и пересекут окружность в 4 точках. Эти четыре точки образуют либо прямоуглыник либо равнобедренную трапецию. Для прямоугольника центр находится как пересечение диагоналей. Для трапеции находим точку пересечения диагоналей и точку пересечения боковых сторон. Прямая, соединяющая две эти точки содержит в себе диаметр окружности. Аналогично строим второй диаметр относительно другой пары точек. Точка пересечения диаметров и есть центр окружности. (10 баллов)

▷ **5.** Заданы две последовательности $a_{n+1} = \frac{2a_n}{1+a_n^2}, a_0 = \frac{1}{2}$; и $b_{n+1} = b_n^2 -$
$- 2b_n + 2, b_0 = 4$. Доказать,что для всех натуральных n справедливо соотношение

$$a_n b_n = 2b_0 b_1 b_2 \dots b_{n-1}.$$

Ответ:

$$a_n = \frac{3^{2^4} - 1}{3^{2^4} + 1}, b_n = 3^{2^4} - 1$$

(10 баллов)

▷ **6.** Сколько существует различных несократимых дробей a со знаменателем 2015, при которых уравнение имеет решение

$$arcsin^3 x + arccos^3 x = \pi^3 a$$

Ответ: 1218 (10 баллов)

▷ **7.** Каждая из 33 прямых разбивает правильный восьмиугольник на два шестиугольника, площади которых относятся как 3:4. Докажите, что по крайней мере пять из этих прямых проходят через одну точку.

Ответ: Доказательство сводится к получению следующего утверждения: прямая тогда и только тогда разбивает 8-угольник на 2 шестиугольника, площади которых находятся в заданном соотношении, когда она проходит через 1 из 8 определенных точек, принадлежащих этому шестиугольнику, далее применяется принцип Дирихле (10 баллов)

$\triangleright$ **8.** В коробке лежит 2015 спичек. За ход разрешается взять из коробки не более половины имеющихся в ней спичек. Из двух игроков проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выигрывает при правильной игре?

Ответ: Первый выигрывает(10 баллов)

$\triangleright$ **9.** От каждой вершины единичного куба отпиливают на расстоянии h от каждой вершины, перпендикулярно диагонали куба, проходящей через эту вершину, треугольные пирамиды, так, что в полученный многогранник можно вписать шар. Какие значения может принимать объем этого многогранника?

Ответ: $(0;\frac{1}{6}]\bigcup\{\frac{5}{2}(2-\sqrt{3})\}$ (10 баллов)

$\triangleright$ **10.** Пусть $S=x_1+x_2+\ldots+x_{2015}$. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значением S, если известно, что выполнены соотношения

$$\left\{\begin{array}{l} x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+\ldots+2x_{2014}^2+x_{2015}^2+2x_1+2014\leq \\ \leq 2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+\ldots+x_{2014}x_{2015})+2x_{2015}, \\ (x_1-1)^4+(x_2-2)^4+(x_3-3)^4+\ldots+(x_{2015}-2015)^4=32240. \end{array}\right.$$

Ответ: 8060