XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

6 класс

▷ **1 (10 баллов).** Две окружности радиуса $R_1 = 16$ и $R_2 = 24$ соприкасаются в одной точке, из которой одновременно начинают двигаться два муравья, каждый по своей окружности, с одинаковой скоростью. Какой путь пройдут муравьи до первой встречи в начальной точке, из которой они стартовали?

▷ **2 (10 баллов).** В классе 30 учеников. Средний рост всех учеников 160 см. Когда из класса перевелся в другой класс ученик с ростом 145 см, а в класс пришел новый ученик, то средний рост учеников в этом классе стал 161 см. Какой рост у пришедшего ученика?

▷ **3 (10 баллов).** К числу 2023 приписали слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, делящееся на 27. Найдите все такие числа.

▷ **4 (10 баллов).** В кондитерском магазине продаются конфеты трех видов: карамельки по 3 рубля, ириски по 5 рублей и шоколадки по 10 рублей. Варя хотела приобрести ровно по 8 конфет каждого вида и захватила с собой 200 рублей. Утром она увидела в магазине объявления:«При оплате трех шоколадок получи на кассе бесплатную ириску» и «При оплате трех ирисок получи на кассе бесплатную карамельку». Сколько денег останется у Вари, когда у нее окажется по 8 конфет каждого вида?

▷ **5 (10 баллов).** У продавца имеется емкость с молоком объемом 24 литра, а также пустые емкости 10 и 14 литров. Каким образом отмерить 12 литров?

▷ **6 (10 баллов).** На доске написали последовательно натуральные числа от 1 до 2023. Далее из них вычеркнули числа, кратные 3, 5 и 12. Сколько незачеркнутых чисел осталось на доске?

▷ **7 (10 баллов).** Найдите решение ребуса

$$A \cdot B + A + B = \overline{AB},$$

A и B — две различные цифры; запись $\overline{AB}$ означает двузначное число (то есть $A \neq 0$), составленное из цифр A и B. В качестве ответа напишите числа $\overline{AB}$.

▷ **8 (10 баллов).** Найдите две последние цифры, на которые оканчивается сумма

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2.$$

▷ **9 (10 баллов).** Произведение пятизначного числа на 8 есть куб натурального числа. Найти наименьшее из таких чисел.

▷ **10 (10 баллов).** В корзине находится не более 48 шаров четырех цветов: красные, белые, черные и синие. Красные составляют $\frac{1}{3}$ от их количества, белые — $\frac{1}{5}$ и черные — $\frac{1}{9}$. Сколько в корзине синих шаров?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

6 класс

▷ **1 (10 баллов).** Две окружности радиуса $R_1 = 16$ и $R_2 = 24$ соприкасаются в одной точке, из которой одновременно начинают двигаться два муравья, каждый по своей окружности, с одинаковой скоростью. Какой путь пройдут муравьи до первой встречи в начальной точке, из которой они стартовали?

▷ **2 (10 баллов).** В классе 30 учеников. Средний рост всех учеников 160 см. Когда из класса перевелся в другой класс ученик с ростом 145 см, а в класс пришел новый ученик, то средний рост учеников в этом классе стал 161 см. Какой рост у пришедшего ученика?

▷ **3 (10 баллов).** К числу 2023 приписали слева и справа по одной цифре так, чтобы получилось число, делящееся на 27. Найдите все такие числа.

▷ **4 (10 баллов).** В кондитерском магазине продаются конфеты трех видов: карамельки по 3 рубля, ириски по 5 рублей и шоколадки по 10 рублей. Варя хотела приобрести ровно по 8 конфет каждого вида и захватила с собой 200 рублей. Утром она увидела в магазине объявления:«При оплате трех шоколадок получи на кассе бесплатную ириску» и «При оплате трех ирисок получи на кассе бесплатную карамельку». Сколько денег останется у Вари, когда у нее окажется по 8 конфет каждого вида?

▷ **5 (10 баллов).** У продавца имеется емкость с молоком объемом 24 литра, а также пустые емкости 10 и 14 литров. Каким образом отмерить 12 литров?

▷ **6 (10 баллов).** На доске написали последовательно натуральные числа от 1 до 2023. Далее из них вычеркнули числа, кратные 3, 5 и 12. Сколько незачеркнутых чисел осталось на доске?

▷ **7 (10 баллов).** Найдите решение ребуса

$$A \cdot B + A + B = \overline{AB},$$

A и B — две различные цифры; запись $\overline{AB}$ означает двузначное число (то есть $A \neq 0$), составленное из цифр A и B. В качестве ответа напишите числа $\overline{AB}$.

▷ **8 (10 баллов).** Найдите две последние цифры, на которые оканчивается сумма

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + 49^2 + 50^2.$$

▷ **9 (10 баллов).** Произведение пятизначного числа на 8 есть куб натурального числа. Найти наименьшее из таких чисел.

▷ **10 (10 баллов).** В корзине находится не более 48 шаров четырех цветов: красные, белые, черные и синие. Красные составляют $\frac{1}{3}$ от их количества, белые — $\frac{1}{5}$ и черные — $\frac{1}{9}$. Сколько в корзине синих шаров?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

7 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $39^x = 1521\left[39^{x-2} + \frac{1}{39x}\right] - y$.

▷ **2 (10 баллов).** В четырехугольнике даны три угла: 91°, 97° и 101°. Диагональ четырехугольника, выходящая из вершины четвертого угла, равна 2022 см. Может ли в этом четырехугольнике длина второй диагонали быть 2023 см?

▷ **3 (10 баллов).** Известно, что $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} = \frac{9}{10}$, $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = \frac{51}{10}$. Найти $x+y+z$.

▷ **4 (10 баллов).** Сколько различных пар взаимно простых натуральных чисел m и n $(m > n)$ существует таких, что частное многочленов $m^3 - m^2 + m^2n - n^2m + n^2 - n^3$ и $m^2 - n^2$ равно 17? В ответе укажите пары таких чисел.

▷ **5 (10 баллов).** Есть куб $7 \times 7 \times 7$, составленный из маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$. У куба три пары противоположных граней. Пронумеруем их: 1, 2, 3. На каждой грани маленьких кубиков написали номер той пары граней куба, которой она принадлежит. Затем куб разобрали на мелкие кубики. У скольких кубиков сумма цифр на гранях четная (кубики, у которых вообще нет цифр на гранях, не считать)?

▷ **6 (10 баллов).** На карте нанесены 4 населенных пункта А, Б, В, Г. Расстояние от города А до города Б по прямой 25 км, расстояние от города Б до города В по прямой 35 км, от города В до города Г по прямой — 60 км, а от города А до города Г по прямой — 120 км. Какое время велосипедист затратил бы на прохождение пути по прямой от А до В, если его скорость 10 км/час?

▷ **7 (10 баллов).** Ученик купил ручки по 2 рубля за штуку и карандаши по 3 рубля за штуку. Если бы ручки стоили по 3 рубля за штуку, а карандаши по 4 рубля, то ему пришлось бы заплатить на 16 рублей больше, а если бы ручки стоили 4 рубля, а карандаши — по 1 рублю, то тогда бы он заплатил на 4 рубля меньше. Сколько ручек и карандашей купил ученик и на какую сумму?

▷ **8 (10 баллов).** В треугольнике $\triangle ABC$ проведена высота AH из угла $\angle A$. $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 2 \cdot \angle A$. Найдите угол между высотой AH и стороной AC.

▷ **9 (10 баллов).** Задана величина $m = \frac{1}{1686} + \frac{1}{1687} + \frac{1}{1688} + \ldots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}$.Докажите, что $\frac{1}{6} < m < \frac{1}{5}$.

▷ **10 (10 баллов).** На кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они следуют в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на 20%?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

7 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $39^x = 1521\left[39^{x-2} + \frac{1}{39x}\right] - y$.

▷ **2 (10 баллов).** В четырехугольнике даны три угла: 91°, 97° и 101°. Диагональ четырехугольника, выходящая из вершины четвертого угла, равна 2022 см. Может ли в этом четырехугольнике длина второй диагонали быть 2023 см?

▷ **3 (10 баллов).** Известно, что $\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{y+z} = \frac{9}{10}$, $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} = \frac{51}{10}$. Найти $x+y+z$.

▷ **4 (10 баллов).** Сколько различных пар взаимно простых натуральных чисел m и n $(m > n)$ существует таких, что частное многочленов $m^3 - m^2 + m^2n - n^2m + n^2 - n^3$ и $m^2 - n^2$ равно 17? В ответе укажите пары таких чисел.

▷ **5 (10 баллов).** Есть куб $7 \times 7 \times 7$, составленный из маленьких кубиков $1 \times 1 \times 1$. У куба три пары противоположных граней. Пронумеруем их: 1, 2, 3. На каждой грани маленьких кубиков написали номер той пары граней куба, которой она принадлежит. Затем куб разобрали на мелкие кубики. У скольких кубиков сумма цифр на гранях четная (кубики, у которых вообще нет цифр на гранях, не считать)?

▷ **6 (10 баллов).** На карте нанесены 4 населенных пункта А, Б, В, Г. Расстояние от города А до города Б по прямой 25 км, расстояние от города Б до города В по прямой 35 км, от города В до города Г по прямой — 60 км, а от города А до города Г по прямой — 120 км. Какое время велосипедист затратил бы на прохождение пути по прямой от А до В, если его скорость 10 км/час?

▷ **7 (10 баллов).** Ученик купил ручки по 2 рубля за штуку и карандаши по 3 рубля за штуку. Если бы ручки стоили по 3 рубля за штуку, а карандаши по 4 рубля, то ему пришлось бы заплатить на 16 рублей больше, а если бы ручки стоили 4 рубля, а карандаши — по 1 рублю, то тогда бы он заплатил на 4 рубля меньше. Сколько ручек и карандашей купил ученик и на какую сумму?

▷ **8 (10 баллов).** В треугольнике $\triangle ABC$ проведена высота AH из угла $\angle A$. $\angle B = 120^\circ$, $\angle C = 2 \cdot \angle A$. Найдите угол между высотой AH и стороной AC.

▷ **9 (10 баллов).** Задана величина $m = \frac{1}{1686} + \frac{1}{1687} + \frac{1}{1688} + \ldots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}$.Докажите, что $\frac{1}{6} < m < \frac{1}{5}$.

▷ **10 (10 баллов).** На кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они следуют в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на 20%?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

8 класс

▷ **1 (10 баллов).** Рассмотрим три самых маленьких простых числа: 2, 3 и 5. Сколько существует различных трехзначных чисел, которые делятся без остатка на любые два из этих простых чисел и не делятся на третье?

▷ **2 (10 баллов).** Установить, какое из чисел больше: $2023^{2023}+2021^{2021}$ или $2023^{2021}+2021^{2023}$.

▷ **3 (10 баллов).** В ромбе $ABCD$ величина угла B равна $40°$, E — середина BC, F — основание перпендикуляра, опущенного из A на DE. Найдите величину угла DFC.

▷ **4 (10 баллов).** Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y+z=-1 \end{cases}$

▷ **5 (10 баллов).** Существует ли натуральное n такое, что n^2+n+1 делится на 1001?

▷ **6 (10 баллов).** Среди чисел от 1 до 500 выбрали 430. Докажите, что произведение каких-то двух делится на 35.

▷ **7 (10 баллов).** Задан отрезок a. С помощью циркуля и линейки (без масштаба измерения) построить отрезок $b = a\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. Все этапы построения подробно описать.

▷ **8 (10 баллов).** Решить уравнение

$$4\sqrt{x-3}-\frac{1}{16}x^2=3.$$

▷ **9 (10 баллов).** Найти нечетное трехзначное число, если известно, что сумма квадратов чисел сотен и единиц не превосходит удвоенного числа сотен, а квадрат числа десятков превосходит квадрат суммы чисел сотен и единиц более чем на 60.

▷ **10 (10 баллов).** Дано уравнение $x^2+ax+6=0$, x_1, x_2 — его корни, причем $x_1^2+x_2^2=13$. Найти x_1+x_2.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

8 класс

▷ **1 (10 баллов).** Рассмотрим три самых маленьких простых числа: 2, 3 и 5. Сколько существует различных трехзначных чисел, которые делятся без остатка на любые два из этих простых чисел и не делятся на третье?

▷ **2 (10 баллов).** Установить, какое из чисел больше: $2023^{2023}+2021^{2021}$ или $2023^{2021}+2021^{2023}$.

▷ **3 (10 баллов).** В ромбе $ABCD$ величина угла B равна $40°$, E — середина BC, F — основание перпендикуляра, опущенного из A на DE. Найдите величину угла DFC.

▷ **4 (10 баллов).** Решить систему уравнений $\begin{cases} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y+z=-1 \end{cases}$

▷ **5 (10 баллов).** Существует ли натуральное n такое, что n^2+n+1 делится на 1001?

▷ **6 (10 баллов).** Среди чисел от 1 до 500 выбрали 430. Докажите, что произведение каких-то двух делится на 35.

▷ **7 (10 баллов).** Задан отрезок a. С помощью циркуля и линейки (без масштаба измерения) построить отрезок $b = a\cdot\dfrac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{2}}$. Все этапы построения подробно описать.

▷ **8 (10 баллов).** Решить уравнение

$$4\sqrt{x-3}-\frac{1}{16}x^2=3.$$

▷ **9 (10 баллов).** Найти нечетное трехзначное число, если известно, что сумма квадратов чисел сотен и единиц не превосходит удвоенного числа сотен, а квадрат числа десятков превосходит квадрат суммы чисел сотен и единиц более чем на 60.

▷ **10 (10 баллов).** Дано уравнение $x^2+ax+6=0$, x_1, x_2 — его корни, причем $x_1^2+x_2^2=13$. Найти x_1+x_2.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

9 класс

$\triangleright$ **1 (10 баллов).** Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, оказалось, что $a^2+b^2 = (a+b)q+r$ и $r < (a+b)$, $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Найти максимальную сумму $a+b$, если $q^2+r+10 = 2023$.

$\triangleright$ **2 (10 баллов).** Решить уравнение в целых числах

$$\sqrt{xy^2-2022}+1 = \frac{2023}{xy^2+1}.$$

$\triangleright$ **3 (10 баллов).** По двум взаимно перпендикулярным дорогам движутся в направлении перекрестка велосипедист и пешеход. В некоторый момент времени велосипедист находится на расстоянии 32 км, а пешеход — на расстоянии 14 км от перекрестка. Через какое время после этого расстояние между ними будет равно 10 км и на каком расстоянии будут находиться велосипедист и пешеход от перекрестка, если скорость пешехода 4 км/час, а велосипедиста 12 км/час?

$\triangleright$ **4 (10 баллов).** Найти наименьшее положительное решение неравенства $[x]^2 - x\cdot[x]+3 \le 0$.

$\triangleright$ **5 (10 баллов).** Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2},$$

где x, y — произвольные вещественные числа.

$\triangleright$ **6 (10 баллов).** Установить, какое из чисел больше $\frac{2023^{2023}+2020^{2020}}{2023^{2020}+2020^{2023}}$ или 1.

$\triangleright$ **7 (10 баллов).** Постройте кривую, все точки которой определяются уравнением $y^2-2|y| = 1-x^2$. Найдите площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

$\triangleright$ **8 (10 баллов).** Зная заданный отрезок a, с помощью циркуля и линейки (без масштаба измерения) построить отрезок $b = a\cdot\frac{2+\sqrt{7}}{1+\sqrt{11}}$.

$\triangleright$ **9 (10 баллов).** Сколько действительных корней имеет уравнение

$$(x^{2023}+2022x^3-2021)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{7}x\right) = 0$$

на отрезке $x \in [-36, 34]$?

$\triangleright$ **10 (10 баллов).** Найти наибольшее значение параметра a, при котором многочлены $P(x) = 2x^3+x^2+x+a$ и $Q(x) = x^3-2x^2+x+2a$ имеют хотя бы один общий корень.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

9 класс

$\triangleright$ **1 (10 баллов).** Пусть $a, b \in \mathbb{N}$, оказалось, что $a^2+b^2 = (a+b)q+r$ и $r < (a+b)$, $k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Найти максимальную сумму $a+b$, если $q^2+r+10 = 2023$.

$\triangleright$ **2 (10 баллов).** Решить уравнение в целых числах

$$\sqrt{xy^2-2022}+1 = \frac{2023}{xy^2+1}.$$

$\triangleright$ **3 (10 баллов).** По двум взаимно перпендикулярным дорогам движутся в направлении перекрестка велосипедист и пешеход. В некоторый момент времени велосипедист находится на расстоянии 32 км, а пешеход — на расстоянии 14 км от перекрестка. Через какое время после этого расстояние между ними будет равно 10 км и на каком расстоянии будут находиться велосипедист и пешеход от перекрестка, если скорость пешехода 4 км/час, а велосипедиста 12 км/час?

$\triangleright$ **4 (10 баллов).** Найти наименьшее положительное решение неравенства $[x]^2 - x\cdot[x]+3 \le 0$.

$\triangleright$ **5 (10 баллов).** Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+2)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-2)^2},$$

где x, y — произвольные вещественные числа.

$\triangleright$ **6 (10 баллов).** Установить, какое из чисел больше $\frac{2023^{2023}+2020^{2020}}{2023^{2020}+2020^{2023}}$ или 1.

$\triangleright$ **7 (10 баллов).** Постройте кривую, все точки которой определяются уравнением $y^2-2|y| = 1-x^2$. Найдите площадь фигуры, ограниченной этой кривой.

$\triangleright$ **8 (10 баллов).** Зная заданный отрезок a, с помощью циркуля и линейки (без масштаба измерения) построить отрезок $b = a\cdot\frac{2+\sqrt{7}}{1+\sqrt{11}}$.

$\triangleright$ **9 (10 баллов).** Сколько действительных корней имеет уравнение

$$(x^{2023}+2022x^3-2021)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{7}x\right) = 0$$

на отрезке $x \in [-36, 34]$?

$\triangleright$ **10 (10 баллов).** Найти наибольшее значение параметра a, при котором многочлены $P(x) = 2x^3+x^2+x+a$ и $Q(x) = x^3-2x^2+x+2a$ имеют хотя бы один общий корень.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

10 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найдите квадратный трехчлен $P(x)$, у которого один из корней совпадает с корнем многочлена $Q(x) = P(x) - 6x + 12$, а второй корень в три раза меньше наибольшего из корней многочлена $Q(x)$ и $Q(3) = -3$.

▷ **2 (10 баллов).** $\begin{cases} x_1(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 1, \\ x_2(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 3, \\ x_3(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 5, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2023}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 4045. \end{cases}$

▷ **3 (10 баллов).** На плоскости Oxy заданы две точки: $A(6,1)$ и $B(2,5)$. Найти наименьшую длину ломаной $AMNB$, если точка M лежит на оси Ox, а точка N — на оси Oy.

▷ **4 (10 баллов).** Сколько существует различных восьмизначных чисел, делящихся на 11, в десятичной записи которых ровно по одному разу встречаются цифры $\{4,5,6,7,8,9\}$, а оставшиеся две цифры — нули?

▷ **5 (10 баллов).** Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos^3 x = \sin y; \\ \sin^3 x = \cos y. \end{cases}$

▷ **6 (10 баллов).** Найти решение уравнения в целых числах:

$$10 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 18x + 81} = 0.$$

▷ **7 (10 баллов).** Числа $\frac{5}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{121}{10}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии. Найти разность прогрессии, если известно, что первое из указанных чисел является ее шестым членом.

▷ **8 (10 баллов).** Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания пирамиды? Ответ обосновать.

▷ **9 (10 баллов).** Три равных окружности радиуса r расположены внутри окружности радиуса R, попарно касаются между собой и внешней окружности. Зная величину отрезка r, при помощи циркуля и линейки (без единицы измерения) построить отрезок R.

▷ **10 (10 баллов).** Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Найти угол $\angle A$ треугольника $\triangle ABC$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

10 класс

▷ **1 (10 баллов).** Найдите квадратный трехчлен $P(x)$, у которого один из корней совпадает с корнем многочлена $Q(x) = P(x) - 6x + 12$, а второй корень в три раза меньше наибольшего из корней многочлена $Q(x)$ и $Q(3) = -3$.

▷ **2 (10 баллов).** $\begin{cases} x_1(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 1, \\ x_2(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 3, \\ x_3(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 5, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{2023}(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{2023}) = 4045. \end{cases}$

▷ **3 (10 баллов).** На плоскости Oxy заданы две точки: $A(6,1)$ и $B(2,5)$. Найти наименьшую длину ломаной $AMNB$, если точка M лежит на оси Ox, а точка N — на оси Oy.

▷ **4 (10 баллов).** Сколько существует различных восьмизначных чисел, делящихся на 11, в десятичной записи которых ровно по одному разу встречаются цифры $\{4,5,6,7,8,9\}$, а оставшиеся две цифры — нули?

▷ **5 (10 баллов).** Решить систему уравнений $\begin{cases} \cos^3 x = \sin y; \\ \sin^3 x = \cos y. \end{cases}$

▷ **6 (10 баллов).** Найти решение уравнения в целых числах:

$$10 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1} - \sqrt{x^2 + y^2 - 18x + 81} = 0.$$

▷ **7 (10 баллов).** Числа $\frac{5}{2}$, $-\frac{11}{2}$, $\frac{121}{10}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии. Найти разность прогрессии, если известно, что первое из указанных чисел является ее шестым членом.

▷ **8 (10 баллов).** Существует ли четырехугольная пирамида, две противоположные боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания пирамиды? Ответ обосновать.

▷ **9 (10 баллов).** Три равных окружности радиуса r расположены внутри окружности радиуса R, попарно касаются между собой и внешней окружности. Зная величину отрезка r, при помощи циркуля и линейки (без единицы измерения) построить отрезок R.

▷ **10 (10 баллов).** Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Найти угол $\angle A$ треугольника $\triangle ABC$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

11 класс

▷ **1 (10 баллов).** В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребре AB взята точка P так, что $AP : PB = 1 : 2$, на ребре AD взята точка Q так, что $AQ : QD = 2 : 3$ и на ребре BC точка R такая, что $BR : RC = 3 : 1$. В каком отношении отрезок QR делится плоскостью CDP?

▷ **2 (10 баллов).** Пешеход, велосипедист и мотоциклист едут по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход обгонял их на 4 км. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист обгонял их на 6 км. На сколько километров велосипедист отставал от мотоциклиста в тот момент, когда мотоциклист обгонял пешехода?

▷ **3 (10 баллов).** Последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, задана такими равенствами: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $n \geq 2$. Найдите такие n, при которых $|a_n| \leq 10^{-3}$.

▷ **4 (10 баллов).** Длины сторон AB, AC, BC треугольника ABC, периметр которого равен 6, в указанном порядке являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите ее разность, если угол $\angle BAC$ в два раза больше угла $\angle ABC$.

▷ **5 (10 баллов).** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

▷ **6 (10 баллов).** Пусть a и b натуральные числа такие, что несократимая дробь представима в виде суммы $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{118} + \frac{1}{119}$. Докажите, что число a делится на 179.

▷ **7 (10 баллов).** Найти решение уравнения в натуральных числах x и y:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10} + \sqrt{x^2 + y^2 - 18x - 6y + 90} - 10 = 0.$$

▷ **8 (10 баллов).** Вершины правильного 11-угольника раскрашены в 2 цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$.

▷ **9 (10 баллов).** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{a^2+x^2-4x-6a-23}{\sqrt{a^2+ax-2x^2-2a-x+1}} = 0$ имеет единственное решение.

▷ **10 (10 баллов).** Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Доказать, что точка M пересечения прямых BE и CG лежит на окружности ω.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXI Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2023»

Заключительный тур

26 февраля 2023 года

11 класс

▷ **1 (10 баллов).** В треугольной пирамиде $ABCD$ на ребре AB взята точка P так, что $AP : PB = 1 : 2$, на ребре AD взята точка Q так, что $AQ : QD = 2 : 3$ и на ребре BC точка R такая, что $BR : RC = 3 : 1$. В каком отношении отрезок QR делится плоскостью CDP?

▷ **2 (10 баллов).** Пешеход, велосипедист и мотоциклист едут по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход обгонял их на 4 км. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист обгонял их на 6 км. На сколько километров велосипедист отставал от мотоциклиста в тот момент, когда мотоциклист обгонял пешехода?

▷ **3 (10 баллов).** Последовательность $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, задана такими равенствами: $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ и $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$, $n \geq 2$. Найдите такие n, при которых $|a_n| \leq 10^{-3}$.

▷ **4 (10 баллов).** Длины сторон AB, AC, BC треугольника ABC, периметр которого равен 6, в указанном порядке являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите ее разность, если угол $\angle BAC$ в два раза больше угла $\angle ABC$.

▷ **5 (10 баллов).** Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций: $y = 2\operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

▷ **6 (10 баллов).** Пусть a и b натуральные числа такие, что несократимая дробь представима в виде суммы $\frac{a}{b} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{118} + \frac{1}{119}$. Докажите, что число a делится на 179.

▷ **7 (10 баллов).** Найти решение уравнения в натуральных числах x и y:

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 2x - 6y + 10} + \sqrt{x^2 + y^2 - 18x - 6y + 90} - 10 = 0.$$

▷ **8 (10 баллов).** Вершины правильного 11-угольника раскрашены в 2 цвета: красный и синий. Может ли оказаться так, что для каждой вершины A этого 11-угольника найдутся такие красные вершины B и C, а также синие вершины D и E, что выполняются равенства $AB = AC$ и $AD = AE$.

▷ **9 (10 баллов).** Найти все значения параметра a, при которых уравнение $\frac{a^2+x^2-4x-6a-23}{\sqrt{a^2+ax-2x^2-2a-x+1}} = 0$ имеет единственное решение.

▷ **10 (10 баллов).** Дан треугольник $\triangle ABC$ с острым углом $\angle A$ такой, что $AB \neq AC$. На сторонах AB и AC вне треугольника построены квадраты $ABDE$ и $ACFG$ с центрами K и L. Оказалось, что точки D, E, F и G лежат на одной окружности ω с центром O. Доказать, что точка M пересечения прямых BE и CG лежит на окружности ω.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!