XXIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2021»

Заключительный тур

14 февраля 2021 года

10 класс

1 вариант

▷ **1.** Решить в натуральных числах уравнение

$$n^4m^2 - k^2 = 2021.$$

▷ **2.** Решить уравнение:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{35}{12}.$$

▷ **3.** Приведите пример многочлена с целыми коэффициентами, имеющего корень $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$.

▷ **4.** Найти все натуральные числа n, для которых сумма

$$S_n = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

является полным квадратом ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$). Ответ обосновать.

▷ **5.** Вычислить $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, если α, β и γ — углы треугольника.

▷ **6.** Два квадрата $ABCD$ и $BEFG$ имеют общую сторону $BC = BG$. Квадрат $ABCD$ повернули на некоторый угол относительно общей вершины B как центра окружности так, что продолжение диагонали AC проходит через точку F квадрата $BEFG$. Найти угол AJG, где J — точка пересечения стороны BG неподвижного квадрата $BEFG$ с диагональю AC квадрата $ABCD$ после поворота.

▷ **7.** Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3 \ldots}}} + x^2 = 2021.$$

▷ **8.** На плоскости заданы точки $A(2,4)$, $B(4,2)$ и прямая $y = kx$ $(k > 0)$. Точка M принадлежит прямой $y = kx$. Найти треугольник $\triangle ABM$ с минимальным значением его периметра и вычислить значение периметра.

▷ **9.** Известно, что в разностороннем треугольнике $\triangle ABC$ длины медиан пропорциональны длинам сторон, к которым они проведены. Найти коэффициент пропорциональности.

▷ **10.** Найдите область значений функции $f(x) = \sin^2 x + \cos x$. Привести точные нижнюю и верхнюю границы области.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXIX Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2021»

Заключительный тур

14 февраля 2021 года

10 класс

1 вариант

▷ **1.** Решить в натуральных числах уравнение

$$n^4m^2 - k^2 = 2021.$$

▷ **2.** Решить уравнение:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} = \frac{35}{12}.$$

▷ **3.** Приведите пример многочлена с целыми коэффициентами, имеющего корень $x = \sqrt[3]{2} + \sqrt{3}$.

▷ **4.** Найти все натуральные числа n, для которых сумма

$$S_n = 1! + 2! + 3! + \dots + n!$$

является полным квадратом ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$). Ответ обосновать.

▷ **5.** Вычислить $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$, если α, β и γ — углы треугольника.

▷ **6.** Два квадрата $ABCD$ и $BEFG$ имеют общую сторону $BC = BG$. Квадрат $ABCD$ повернули на некоторый угол относительно общей вершины B как центра окружности так, что продолжение диагонали AC проходит через точку F квадрата $BEFG$. Найти угол AJG, где J — точка пересечения стороны BG неподвижного квадрата $BEFG$ с диагональю AC квадрата $ABCD$ после поворота.

▷ **7.** Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3 \cdot \sqrt[5]{x^3 \ldots}}} + x^2 = 2021.$$

▷ **8.** На плоскости заданы точки $A(2,4)$, $B(4,2)$ и прямая $y = kx$ $(k > 0)$. Точка M принадлежит прямой $y = kx$. Найти треугольник $\triangle ABM$ с минимальным значением его периметра и вычислить значение периметра.

▷ **9.** Известно, что в разностороннем треугольнике $\triangle ABC$ длины медиан пропорциональны длинам сторон, к которым они проведены. Найти коэффициент пропорциональности.

▷ **10.** Найдите область значений функции $f(x) = \sin^2 x + \cos x$. Привести точные нижнюю и верхнюю границы области.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!