**САММАТ-2021**
**Решение задач 9 класса**
**1 вариант**

**Задача №1.** При каких значениях параметра $a$ корни уравнения $x^3+ax^2+56x-64=0$ составляют геометрическую прогрессию.

Решение: $x^3+ax^2+56x-64=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=(x-m)(x-mq)(x-mq^2)$. Раскрываем скобки и сравниваем коэффициенты при одинаковых степенях $x$:

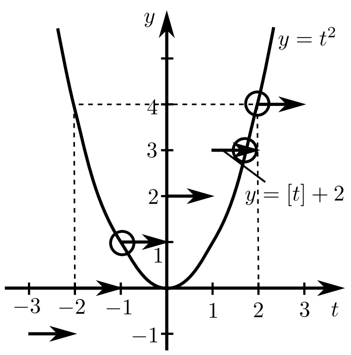
$x^3+ax^2+56x-64=(x^2-mx-mqx+m^2q)(x-mq^2)=$
$=x^3-mx^2(1+q)+m^2qx-mq^2x^2+m^2x(1+q)q^2+m^3q^3=$
$=x^3-x^2m(1+q+q^2)+xm^2q(1+q+q^2)+m^3q^3\Rightarrow$

$$\begin{cases}m(1+q+q^2)=-a\\ m^2q(1+q+q^2)=50\\ m^3q^3=64\Rightarrow mq=4\end{cases}$$

Из 1 и 2 уравнений $mq=-\frac{56}{a}$, но $mq=4\Rightarrow -\frac{56}{a}=4\Rightarrow a=-14$.

Ответ: $-14$.

**Задача №2.** Решите уравнение: $x^2-x-\frac{7}{4}=\left[x-\frac{1}{2}\right]$. Здесь квадратные скобки $[x]$ означают целую часть числа $x$, т.е. наибольшее целое, не превосходящее $x$.




Решение: $x^2-x-\frac{7}{4}=\left[x-\frac{1}{2}\right]\Rightarrow 4x^2-4x-7=4\left[x-\frac{1}{2}\right]$ $\Rightarrow 4x^2-4x+1=4\left[x-\frac{1}{2}\right]+8$.

Сделаем замену $t=x-\frac{1}{2}$, тогда $4t^2=4[t]+8\Rightarrow t^2=[t]+2$. Это уравнение имеет три корня $\{-1,\sqrt{3},2\}$ (см. графики функций $y=t^2$ и $y=[t]+2$). $t^2=3\Rightarrow t=\sqrt{3}$ ($-\sqrt{3}$ не подходит). Корни $t=1$ и $t=2$ очевидны. Так как $x=t+\frac{1}{2}$, то получим $x\in\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\sqrt{3};\frac{5}{2}\right\}$.

Ответ: $x\in\left\{-\frac{1}{2};\frac{1}{2}+\sqrt{3};\frac{5}{2}\right\}$.

**Задача №3.** Пятеро преподавателей проверяют олимпиадные работы. Первый, четвертый и пятый преподаватели, работая вместе, могут проверить все работы за 20 часов. Второй, третий и пятый — за 15 часов. Если эти работы проверяют все преподаватели, кроме пятого, то все работы будут проверены на 10 часов. Во сколько раз быстрее будут проверены все работы, если в проверке участвуют все пять преподавателей по сравнению с тем, когда проверяет все работы только пятый преподаватель.

Решение: $\Pi_i$ $(i=\overline{1,5})$ — производительность каждого преподавателя, все работы — условная 1.

$$\Pi_1+\Pi_4+\Pi_5=\frac{1}{20}\tag{1}$$

$$\Pi_2+\Pi_3+\Pi_5=\frac{1}{15}\tag{2}$$

$$\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4=\frac{1}{10}\tag{3}$$

Сложим все уравнения:

$$2(\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4+\Pi_5)=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}+\frac{1}{10}\quad\Rightarrow\quad \Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4+\Pi_5=\frac{13}{120}$$

$(1)+(2)-(3)\Rightarrow \Pi_1+\Pi_4+\Pi_5+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_5-\Pi_1-\Pi_2-\Pi_3-\Pi_4=\frac{1}{20}+\frac{1}{15}-\frac{1}{10}\Rightarrow 2\Pi_5=\frac{1}{20}-\frac{1}{30}\Rightarrow \Pi_5=\frac{1}{120}$.

$\frac{\Pi_1+\Pi_2+\Pi_3+\Pi_4+\Pi_5}{\Pi_5}=13$.

Ответ: 13.

**Задача №4.** При каких целых $k, m, n$ имеет место равенство $k^2-m^2-4n^2+4mn=2021$? Выполнить полное исследование задачи и привести несколько примеров.

Решение: Запишем равенство в виде $k^2-(m^2-4mn+4n^2)=43\cdot 47$. Далее $k^2-(m-2n)^2=43\cdot 47$, $(k-m+2n)(k+m-2n)=43\cdot 47$.

Так как 43 и 47 — простые числа, то возможны четыре варианта:

а) $\begin{cases} k-m+2n=43,\\ k+m-2n=47.\end{cases}$

б) $\begin{cases} k-m+2n=47,\\ k+m-2n=43.\end{cases}$

в) $\begin{cases} k-m+2n=-43,\\ k+m-2n=-47.\end{cases}$

г) $\begin{cases} k-m+2n=-47,\\ k+m-2n=-43.\end{cases}$

В вариантах а и б после почленного сложения уравнений получим $k=45$. При этом значении $k$ имеем $m=2n-2$.

В вариантах в и г получим $k=-45$. При этом значении $k$ имеем $m=2n-2$.

Ответ: равенство выполняется, если в тройке $k, m, n$ $k=45$ или $k=-45$, $m$ — любое четное, а $n=\frac{m}{2}+1$.

Пример: 45, 0, 1.

**Задача №5.** Доказать неравенство

$$\frac{x}{-x+y+z}+\frac{y}{x-y+z}+\frac{z}{x+y-z}\geq 3,$$

где $x, y, z$ — стороны произвольного треугольника.

Решение: Введем новые обозначения $-x+y+z=a$ $(a>0)$, $x-y+z=b$ $(b>0)$, $x+y-z=c$ $(c>0)$. Тогда $x=\dfrac{b+c}{2}$, $y=\dfrac{a+c}{2}$, $z=\dfrac{a+b}{2}$. Имеем

$$\frac{x}{-x+y+z}+\frac{y}{x-y+z}+\frac{z}{x+y-z}=\frac{b+c}{2a}+\frac{a+c}{2b}+\frac{a+b}{2c}=\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)=$$

$=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\right)+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)+\left(\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\right)\right]\geq 3$, поскольку $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b}\geq 2$, $\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\geq 2$, $\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{c}\geq 2$. Неравенство доказано.

**Задача №6.** Куб размером $n\times n\times n$, где $n$ — натуральное число, разрезали на 99 кубиков, из которых ровно у одного ребро имеет длину отличную от единицы (у каждого из остальных ребро равно 1). Найти объем исходного куба.

Решение: Обозначим $m$ длину ребра кубика, отличного от единичного. Получаем уравнение $n^3 - m^3 = 98$ (в натуральных числах). Далее, $(n-m)(n^2+nm+m^2) = 98$. Числа $m$ и $n$ одной четности, так как в противном случае $n^3 - m^3$ — нечетное число. При этом если $m$ и $n$ — четные числа, то $n^3 - m^3$ будет делиться на 8, но 98 на 8 не делится. Значит $m$ и $n$ — нечетные, при этом первый множитель произведения $(n-m)(n^2+nm+m^2)$ есть четное число, второй — нечетное. Наконец, второй множитель больше первого: $n^2+nm+m^2 > n > n-m$. Из сказанного и разложения $98 = 2\cdot7\cdot7$ на простые множители получаем систему уравнений $n-m=2$, $n^2+nm+m^2=49$. Решением этой системы в натуральных числах является единственная пара $n=5$, $m=3$.

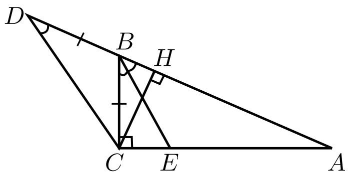
Ответ: 125.

**Задача №7.** Сколько решений в натуральных числах $(m, n)$ имеет уравнение НОК$(m, n) = 2020^3$?

Решение: Разложим $2020^3$ на простые множители: $2020^3 = 2^6 \cdot 5^3 \cdot 101^3$. Пусть $m = 2^a \cdot 5^b \cdot 101^c$, $n = 2^x \cdot 5^y \cdot 101^z$. Тогда пара $(a, x)$ может принимать 13 значений (одно из чисел 6, другое от 0 до 6), пара $(b, y)$ — 7 значений, пара $(c, z)$ — также 7 значений. Всего решений $13 \cdot 7 \cdot 7 = 637$.

Ответ: 637.

**Задача №8.** В треугольнике $\triangle ABC$ известны длины всех его сторон: $AB = 13$, $BC = 5$, $AC = 12$. На продолжении стороны $AB$ отложен отрезок $BD = BC$ и проведена биссектриса угла $\angle B$ треугольника $\triangle ABC$, пересекающая сторону $AC$ в точке $E$. Найти площадь четырехугольника $CDBE$.




Решение: Так как

$$AB^2 = 13^2 = 169 = 144 + 25 = 12^2 + 5^2 = AC^2 + BC^2,$$

то по обратной теореме Пифагора треугольник $\triangle ABC$ является прямоугольным с прямым углом $\angle C$.

По свойству биссектрисы отрезки $CE$ и $AE$, на которые биссектриса $BE$ угла $\angle B$ разбивает сторону $AC$, соответственно пропорциональны сторонам $BC$ и $AB$ треугольника $\triangle ABC$, откуда находим $\frac{CE}{BC} = \frac{AE}{AB}$, или $\frac{CE}{AE} = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{13}$, тогда $CE = \frac{5}{18}AC = \frac{10}{3}$, $AE = \frac{13}{18}AC = \frac{26}{3}$. В частности, получаем, что $\frac{AE}{AC} = \frac{13}{18}$. Тогда площадь треугольника $\triangle ABE$ равна

$$S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{26}{3} \cdot 5 = \frac{65}{3}.$$

По условию задачи $BD = BC = 5$, тогда $AD = AB + BD = 13 + 5 = 18$, и поэтому $\frac{AB}{AD} = \frac{13}{18} = \frac{AE}{AB}$. Но тогда треугольники $\triangle ABE$ и $\triangle ADC$, имеющие общий угол $\angle A$, подобны с коэффициентом подобия $k = \frac{13}{18}$, поэтому их площади относятся как квадрат коэффициента подобия

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle ACD}} = k^2 = \frac{13^2}{18^2} = \frac{169}{324}.$$

Поэтому площадь треугольника $\triangle ACD$ равна

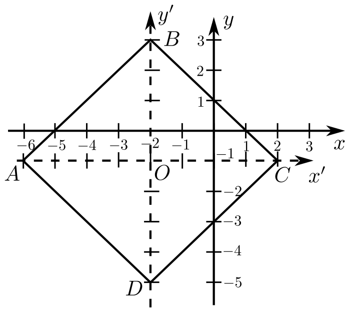
$$S_{\triangle ACD} = \frac{324}{169} \cdot S_{\triangle ABE} = \frac{324}{169} \cdot \frac{65}{3} = \frac{540}{13}.$$

Но тогда искомая площадь четырехугольника $CDBE$ равна разности площадей этих треугольников
$$S_{CDBE} = S_{\triangle ACD} - S_{\triangle ABE} = \frac{540}{13} - \frac{65}{3} = \frac{775}{39}.$$

Ответ: $\frac{775}{39}$.

**Задача №9.** На некоторой планете при изучении геометрии на плоскости расстояние $\rho$ между двумя точками $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$ в декартовой ортогональной системе координат определяют по формуле $\rho(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$. Построить в этой геометрии окружность с центром в точке $(-2, -1)$ и радиусом $R = 4$ и найти длину этой окружности.

Решение:




Введем систему координат $Oy'x'$ с началом в точке $(-2, -1)$ $\begin{cases} x' = x + 2, \\ y' = y + 1. \end{cases}$. В этой системе нужно построить график $|x'| + |y'| = 4$. Это ромб с длинами сторон, равными 8. Длина окружности $S = 4 \cdot |AB| = 4 \cdot (4+4) = 32$.

Ответ: 32.

**Задача №10.** На планете X21KL9 2021 страна, и для любой их четверки хотя бы одна страна из этой четверки враждует с тремя другими. Найти наименьшее возможной количество стран, которые враждуют со всеми странами сразу.

Решение: Найдем максимальное количество стран, воюющих не со всеми, то есть стран, которые не воюют хотя бы с одной из остальных 2020 (назовем их мирными). Допустим, страна $A$ находится в мире со страной $B$. Заметим, что если бы существовала страна $C$, не воюющая с какой-либо страной $D$, то для четверки $A, B, C, D$ не выполнялось бы условие задачи. Следовательно, если существует еще одна мирная страна $C$, то она находится в мире либо с $A$, либо с $B$, либо и с $A$, и с $B$. Очевидно, что четвертой мирной страны $X$ не существует (если она не воюет хотя бы с одной из стран $A, B$ или $C$, то для $A, B, C, X$ не выполняется условие задачи, а случай, в котором она не воюет с какой-либо страной $D$, уже был исключен выше). Значит, наименьшее количество стран, воюющих со всеми — 2018.

Ответ: 2018.