САММАТ-2021
Решение задач 7 класса
1 вариант

Задача №1. Степан спросил у Макара, сколько подъездов в доме, где живет Макар. Вместо ответа Макар сказал следующее: «В моем доме в каждом подъезде одинаковое число этажей с одинаковым числом квартир, при этом число этажей больше числа квартир на этаже, которое, в свою очередь, больше числа подъездов, а всего в доме 80 квартир». Сколько подъездов в доме у Макара?

Решение: Пусть количество подъездов в доме Макара — x, количество этажей — y, количество квартир на этаже — z. Тогда $y > z > x$. Всего в доме xyz квартир, т.е. $xyz = 80$. Разложим 80 на множители $80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$, которые нужно сгруппировать так, чтобы получить различные числа. Возможные варианты: $2 - 5 - 8$, $2 - 4 - 10$. В обоих случаях наименьшее число равно 2, а это x, таким образом, число подъездов равно 2

Ответ: 2.

Задача №2. Укажите наименьшее положительное число, обладающее следующими свойствами: 27% и 45% от него — целые числа.

Решение: Пусть x — данное число, $y = \frac{x}{100} \cdot 27$, $z = \frac{x}{100} \cdot 45$. Тогда $x = \frac{100y}{27}$ и $x = \frac{100z}{45}$ $\Rightarrow \frac{100y}{27} = \frac{100z}{45}$, $45y = 27z$, $5y = 3z$. Поскольку $z, y \in \mathbb{Z}$, то z должно делиться на 5, причем наименьшее возможное значение для z в этом случае равно 5, следовательно $z \geq 5$. Тогда $x = \frac{100z}{45} \geq \frac{100 \cdot 5}{45} = \frac{100}{9}$. Значение $\frac{100}{9}$ и является наименьшим возможным значением и удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $\frac{100}{9}$.

Задача №3. Даны различные числа x и y такие, что $\frac{x}{y} + x = \frac{y}{x} + y$. Найдите $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

Решение: Из условия $x - y = \frac{y}{x} - \frac{x}{y} = \frac{y^2 - x^2}{xy} = \frac{(y-x)(y+x)}{xy}$. Поскольку числа x и y различны, то $\frac{y+x}{xy} = -1 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -1$.

Ответ: -1.

Задача №4. Представить число 1 в виде суммы пяти дробей вида $\frac{1}{n}$ с различными натуральными знаменателями n.

Решение: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}$.

Ответ: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{54}$.

Задача №5. Какое из чисел больше: $\frac{202020202023}{202020202027}$ или $\frac{202120212024}{202120212028}$? Ответ обосновать с помощью алгебраического решения (не прибегая к непосредственному делению).

Решение: $\frac{202020202023}{202020202027} = 1 - \frac{4}{202020202027}$, $\frac{202120212024}{202120212028} = 1 - \frac{4}{202120212028}$

$\frac{4}{202020202027} > \frac{4}{202120212028} \Rightarrow$

$1 - \frac{4}{202020202027} < 1 - \frac{4}{202120212028} \Rightarrow \frac{202020202023}{202020202027} < \frac{202120212024}{202120212028}$

Ответ: $\frac{202020202023}{202020202027} < \frac{202120212024}{202120212028}$.

Задача №6. Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. Как, воспользовавшись весами 11 раз, взвесить 2021 грамм сахара-песка, если после каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную емкость. Приведите последовательность взвешиваний.

Решение:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1 г	2 г	4 г	8 г	16 г	32 г	63 г	126 г	253 г	505 г	1011 г
1 г	1+1 г	1+3 г	1+7 г	1+15 г	1+31 г	63 г	126 г	1+252 г	505 г	1+1010 г

Сумма по всем граммам сахара 1+2+4+8+16+32+63+126+253+505+1011 = 2021.

Задача №7. В черном ящике лежат 40 разноцветных елочных шаров: 14 красных, 10 золотистых, 8 зеленых и 8 синих. Какое наименьшее число елочных шаров нужно вытащить Пете из ящика, чтобы среди них обязательно оказалось: 1) 2 красных шара? 2) 1 красный шар и 1 золотистый? 3) 3 шара одного цвета?

Решение:

1) Рассмотрим худший вариант. Петя вытащил все золотистые, зеленые и синие шары, после чего вытащил 2 красных шара. Тогда минимально нужно вытащить $10 + 8 + 8 + 2 = 28$ шаров.

2) Рассмотрим худший вариант. Петя вытащил все зеленые и синие шары, после чего он вытаскивает или красные, или золотстые шары, в худшем случае он вытащит все красные шары (потому что их больше), а затем вытаскивает 1 золотистый шар. Тогда минимально нужно вытащить $14 + 8 + 8 + 1 = 31$ шар.

3) Рассмотрим худший вариант. Петя вытащил по 2 шара всех цветов (всего 4 цвета), любой шар, который он вытащит следующим, будет одного из существующих в наборе цветов, т.е. имеем $2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$ шаров.

Ответ:1) 28; 2) 31; 3) 9.

Задача №8. Найдите все такие трехзначные числа N, что сумма цифр числа N в 11 раз меньше самого числа N (ответ обоснуйте).

Решение: Если число N это $\overline{abc}$, то из условия имеем $11(a+b+c) = 100a+10b+c$, или $10c + b = 89a$. В этом соотношении число $10c + b$ меньшее, чем 100. Но тогда если $a > 1$, то $10c + b > 100$. Следовательно, $a = 1$ и имеем единственно возможное сочетание c и b: $c = 8$, $b = 9$,

Ответ: 198.

Задача №9. Найдите пару натуральных чисел k и n таких, что

$$k^n = 2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + 2020 \quad (n \neq 1).$$

Решение:

а) $2019 \cdot 2020 \cdot 2021 + 2020 = (2020-1) \cdot 2020 \cdot (2020+1) + 2020 = (2020^2-1) \cdot 2020 + 2020 = 2020^3 - 2020 + 2020 = 2020^3 \Rightarrow k = 2020$, $n = 3$.

б) $k^n = 8242408000 = 8242408 \cdot 10^3 = 1030301 \cdot 2^3 \cdot 10^3$. Отсюда n не более 3. Учитывая,что $100^3 = 1000000$, легко проверить, что $101^3 = 1030301$. Поэтому $(101 \cdot 2 \cdot 10)^3 = (2020)^3 = k^n$.

Ответ: $k = 2020$, $n = 3$.

Задача №10. В прямоугольном треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найти длину гипотенузы AC, если длина катета AB равна a.

Решение: $AE = EC$. Пусть D — середина отрезка AC. Тогда ED является и высотой, поэтому $\triangle AED$ — прямоугольный и $\triangle AED = \triangle ABE$. $AD = AB = a$, $AC = 2AD = 2a$.

Ответ: $AC = 2a$.