САММАТ-2021
Решение задач 11 класса
1 вариант

Задача №1. Число $\overline{abccba}$ состоит из попарно не совпадающих, отличных от нуля цифр a, b, c и делится на 231. Сколько существует таких чисел?

Решение: $231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$.

Число делится на 11:

$$a - b + c - c + b - a = 0$$

делится на 11 при любом выборе a, b, c.

По признаку делимости на 7 разность $|\overline{abc} - \overline{cba}|$ должна делиться на 7. Очевидно,

$$|\overline{abc} - \overline{cba}| = |a \cdot 10^2 + b \cdot 10 + c - c \cdot 10^2 - b \cdot 10 - a| = |(a-c)10^2 - (a-c)| = |a-c| \cdot 99,$$

т.е. $|a - c|$ должно делиться на 7. Это возможно лишь, если $(a = 9, c = 2)$, $(a = 8, c = 1)$, $(a = 1, c = 8)$, $(a = 2, c = 9)$, при произвольном b. Осталось выяснить, сколько возможных значений b приходится на каждую из перечисленных пар.

Для нахождения достаточно выяснить делимость на 3 числа $\overline{abc}$.

1) $a = 9, c = 2 \Rightarrow 9 + b + 2 = 11 + b$. Делимость на 3 числа $\overline{9b2}$ возможна в трех случаях: $b_1 = 1$; $b_2 = 4$; $b_3 = 7$;

2) $a = 8, c = 1 \Rightarrow 8 + b + 1 = 9 + b$. Делимость на 3 числа $\overline{8b1}$ возможна в трех случаях: $b_1 = 3$; $b_2 = 6$; $b_3 = 9$; $(b \neq 0)$.

Остальные случаи симметричны рассмотренным.

Таким образом, на каждую из найденных пар a и c приходится по 3 возможных значения b.

Ответ: 12

Задача №2. Найти точку минимума и наименьшее значение функции

$$f(x) = \frac{x^8 - x^6 - 13x^2 + 10}{(x^2+1)^2}.$$

Решение: Пусть $x^2 = t \geq 0$, тогда функция $f(x)$ принимает вид

$$f(x) = \frac{x^8 - x^6 - 13x^2 + 10}{(x^2+1)^2} = \frac{t^4 - t^3 - 13t + 10}{(t+1)^2} = \frac{(t^4 + 2t^3 + t^2) - 3t^3 - t^2 - 13t + 10}{(t+1)^2} =$$

$$= t^2 + \frac{(-3t^3 - 6t^2 - 3t) + 5t^2 - 10t + 10}{(t+1)^2} = t^2 - 3t + \frac{(t^2 + 2t + 1) + 4t^2 - 12t + 9}{(t+1)^2} =$$

$$= t^2 - 3t + 1 + \frac{4t^2 - 12t + 9}{(t+1)^2} = g(t).$$

Найдем абсциссу вершины параболы с уравнением $y(t) = t^2 - 3t + 1$ по формуле

$$t_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2},$$

тогда

$$y(t) \geq y(t_0) = \frac{3^2}{2^2} - 3 \cdot \frac{3}{2} + 1 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 1 = -\frac{5}{4},$$

то есть первое слагаемое в выражении функции $g(t)$ тоже имеет минимум в этой точке.

Заметим, что второе слагаемое в выражении $g(t)$ неотрицательно и его числитель $z(t)$ равен

$$z(t) = 4t^2 - 12t + 9 = (2t-3)^2,$$

поэтому он равен нулю при $t = t_0 = \frac{3}{2}$, то есть второе слагаемое $z(t)$ в выражении функции $g(t)$ тоже имеет минимум $z(t_0) = 0$ в этой точке.

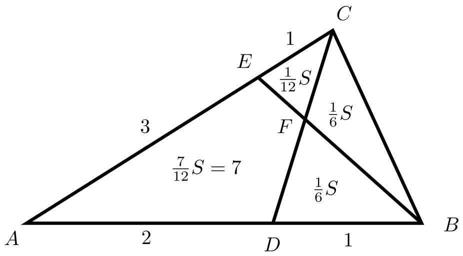
Таким образом, наименьшее значение функции $f(x)$ равно

$$f(x_0) = y(t_0) + z(x_0) = -\frac{5}{4}$$

при условии, что $x = x_0 = \sqrt{t_0} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ответ: $f(x) = -\frac{5}{4}$ при $x = x_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

Задача №3. В треугольнике $\triangle ABC$ на сторонах AB и AC выбраны точки D и E соответственно так, что $AD : DB = 2 : 1$ и $AE : EC = 3 : 1$. Пусть отрезки BE и CD пересекаются в точке F. Найти площадь треугольника $\triangle ABC$, если площадь четырехугольника $ADFE$ равна $S_{ADFE} = 7$.



Решение: Проведем в треугольнике $\triangle ABC$ отрезки BE и CD, пусть они пересекаются в точке F. Пусть также площадь треугольника $\triangle ABC$ равна $S_{\triangle ABC} = S$.

Треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle BCD$ имеют общую высоту, проведенную из вершины C, поэтому их площади относятся как отношение оснований AB и BD:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{AB}{BD} = \frac{AD+BD}{BD} = \frac{AD}{BD} + 1 = 2 + 1 = 3,$$

поэтому площадь треугольника $\triangle BCD$ равна

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3} S.$$

Треугольники $\triangle ABC$ и $\triangle BCE$ имеют общую высоту, проведенную из вершины B, поэтому их площади относятся как отношение оснований:

$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle BCE}} = \frac{AC}{CE} = \frac{AE+CE}{CE} = \frac{AE}{CE} + 1 = 3 + 1 = 4,$$

поэтому площадь треугольника $\triangle BCE$ равна

$$S_{\triangle BCE} = \frac{1}{4} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4} S.$$

Найдем, в каком отношении точка Fделит отрезок CD. Для этого запишем теорему Менелая для треугольника $\triangle ACD$ и секущей CD:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CF}{FD} \cdot \frac{DB}{BA} = 1, \text{ или } \frac{3}{1} \cdot \frac{CF}{FD} \cdot \frac{1}{1+2} = 1, \text{ откуда } \frac{CF}{FD} = 1, \text{ или } CF = FD.$$

Тогда $CF = FD = \frac{1}{2}CD$.

Треугольники $\triangle BCD$ и $\triangle BCF$ имеют общую высоту, проведенную из вершины B, поэтому их площади относятся как отношение оснований:

$$\frac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle BCF}} = \frac{CD}{CF} = \frac{CF + FD}{CF} = 1 + 1 = 2,$$

поэтому площадь треугольника $\triangle BCF$ равна

$$S_{\triangle BCF} = \frac{1}{2}S_{\triangle BCD} = \frac{1}{6}S.$$

Но тогда площади треугольников $\triangle BDF$ и $\triangle CEF$ равны

$$S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BCD} - S_{\triangle BCF} = \frac{1}{3}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{6}S,$$
$$S_{\triangle CEF} = S_{\triangle BCE} - S_{\triangle BCF} = \frac{1}{4}S - \frac{1}{6}S = \frac{1}{12}S.$$

Таким образом, площадь четырехугольника $ADFE$ равна разности площадей

$$S_{ADFE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BCF} - S_{\triangle BDF} - S_{\triangle CEF} = S - \frac{1}{6}S - \frac{1}{6}S - \frac{1}{12}S = \frac{7}{12}S = 7,$$

откуда следует, что искомая площадь S треугольника $\triangle ABC$ равна $S_{\triangle ABC} = S = 7 \cdot \frac{12}{7} = 12$.

Ответ: $S_{\triangle ABC} = 12$.

Задача №4. Доказать, что число

$$(2020 \cdot 2021)^2 + (2020 \cdot 2021 \cdot (2020 \cdot 2021 + 1))^2 + (2020 \cdot 2021 + 1)^2$$

является квадратом некоторого натурального числа. Решение получить алгебраически, не привлекая вычислительных средств (калькулятора).

Решение: Обозначим $2020 \cdot 2021 = a$, тогда исходный пример принимает вид

$a^2+[a(a+1)]^2+(a+1)^2 = a^2+a^2(a^2+2a+1)+a^2+2a+1 = (a^4+2a^3+a^2)+(2a^2+2a+1) = (a^2+a)^2+2(a^2+a)+1 = (a^2+a+1)^2$, т.е. $(2020 \cdot 2021)^2 + (2020 \cdot 2021 \cdot (2020 \cdot 2021 + 1))^2 + (2020 \cdot 2021 + 1)^2 = ((2020 \cdot 2021)^2 + 2020 \cdot 2021 + 1)^2 = 16666157138821^2$.

Замечание: При вычислении на калькуляторе 3 последние цифры не показываются, происходит округление.

Задача №5. Решить уравнение $5 + \sqrt{35 - 2\sqrt{45 - 2x}} = x$.

Решение: Введем замену $y = \sqrt{45 - 2x}$. Тогда получим уравнение:

$$2\sqrt{35 - 2y} = 35 - y^2.$$

Искусственно введем параметр a, заменив 35 на a:

$$2\sqrt{a - 2y} = a - y^2.$$

Решив относительно параметра, получим

$$a = y^2 + 2y \text{ или } a = y^2 - 2y - 4 \text{ при } y \le a.$$

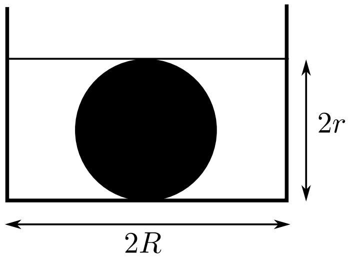
Таким образом, получим два уравнения

$$y^2 + 2y = 35 \text{ и } y^2 - 2y - 4 = 35.$$

Первое уравнение имеет корни $-7 < 0$ и 5 (ему отвечает $x = 10$). Второе уравнение имеет корни $1 - \sqrt{40} < 0$ и $1 + \sqrt{40} > \sqrt{35}$.

Ответ: 10.

Задача №6. На дне вертикального цилиндрического сосуда с радиусом основания R лежит шар радиуса r. В сосуд налита жидкость так, что ее поверхность является касательной к поверхности шара. Этот шар заменили другим — большего радиуса. Жидкость при этом не выливалась из сосуда и не доливалась в него. Оказалось, что новый шар лежит на дне цилиндра, а поверхность жидкости опять является касательной к поверхности шара. При каких значениях соотношения $\frac{R}{r}$ можно наблюдать такое явление при замене шара другим шаром большего радиуса?



Решение: Объем жидкости в сосуде равен $\pi R^2 \cdot 2r - \frac{4}{3}\pi r^3$. Обозначим радиус второго шара ρ, тогда объем жидкости не изменится:

$$\pi R^2 \cdot 2r - \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi R^2 \cdot 2\rho - \frac{4}{3}\pi \rho^3.$$

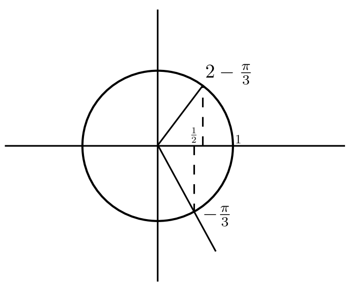
Из этого уравнения найдем ρ. разделив части на 2π и записав в виде $\frac{2}{3}\rho^3 - \frac{2}{3}r^3 = R^2(\rho - r)$. Тогда $\frac{2}{3}(\rho - r)(\rho^2 + r\rho + r^2) = R^2(\rho - r)$, а так как $\rho - r > 0$, то $\rho^2 + r\rho + r^2 - \frac{3}{2}R^2 = 0$.

Отсюда $\rho = \frac{\sqrt{6R^2 - 3r^2} - r}{2}$. Но $\rho \le R$, поэтому, решив неравенство $\rho = \frac{\sqrt{6R^2-3r^2}-r}{2} \le R$ относительно R и учитывая, что $R > r$ (строго больше (!), иначе было бы невозможно взять шар с $\rho > r$) и $\rho > r$, получим: $\sqrt{2}r < R \le r(1 + \sqrt{3})$, отсюда $\sqrt{2} < \frac{R}{r} \le 1 + \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{2} < \frac{R}{r} \le 1 + \sqrt{3}$.

Задача №7. Укажите, при каких значениях параметра a уравнение имеет решение:

$$2\cos^2(2^{4x - x^2 - 4}) = 5a - \sqrt{3}\sin(2^{4x - x^2 - 3}).$$



Решение: Для упрощения исследования введем $t = 2^{4x - x^2 - 3}$, $t > 0$, уравнение примет вид: $2\cos^2\frac{t}{2} = 5a - \sqrt{3}\sin t$, откуда следует: $1 + \cos t = 5a - \sqrt{3}\sin t$, $\cos t + \sqrt{3}\sin t = 5a - 1$, $\frac{1}{2}\cos t + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t = \frac{5a-1}{2}$, $\cos\frac{\pi}{3}\cos t + \sin\frac{\pi}{3}\sin t = \frac{5a-1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right) = \frac{5a-1}{2}$, $\cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{5a-1}{2}$.

Данное уравнение может иметь решение при $-1 \le \frac{5a-1}{2} \le 1$, но не все значения параметра a, удовлетворяющие этому ограничению, подходят, поскольку $0 < t = 2^{4x - x^2 - 3} = 2^{1 - (x-2)^2} \le 2$ и, следовательно, $-\frac{\pi}{3} < t - \frac{\pi}{3} \le 2 - \frac{\pi}{3}$.

Заметим, что $1 < \frac{\pi}{3} < 2$, следовательно, $0 < 2 - \frac{\pi}{3} < 1 < \frac{\pi}{3}$.

Выделяя $\left(-\frac{\pi}{3}; 2 - \frac{\pi}{3}\right]$ на тригонометрическом круге (см. рисунок), видим, что при $\frac{1}{2} < \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right) \le 1$, $t \in (0; 2]$.

Следовательное, исходное уравнение будет иметь хотя бы одно решение, если $\frac{1}{2} < \frac{5a-1}{2} \le 1$, $1 < 5a - 1 \le 2$, $2 < 5a \le 3$, $\frac{2}{5} < a \le \frac{3}{5}$.

Ответ: $a \in \left(\frac{2}{5}; \frac{3}{5}\right]$.

Задача №8. Имеются чашечные весы и гирька массой 1 грамм. За какое минимальное количество взвешиваний можно на этих весах взвесить 2021 грамм сахарапеска? После каждого взвешивания новая порция сахара отсыпается в отдельную емкость. Приведите последовательность взвешиваний.

Решение: Даже если с первое по десятое взвешивание использовать гирьку, то можно взвесить только $2^{10} - 1 = 1023$ грамма. Следовательно, число взвешиваний больше десяти. Далее следует найти способ взвесить 2021 грамм за 11 взвешиваний:

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI
1 г	2 г	4 г	8 г	16 г	32 г	63 г	126 г	253 г	505 г	1011 г
1 г	1+1 г	1+3 г	1+7 г	1+15 г	1+31 г	63 г	126 г	1+252 г	505 г	1+1010 г

$1011 + 1 + 1010 = 2021$ г сахара

Ответ: 11 взвешиваний.

Задача №9. Решите систему уравнений $\begin{cases} |\sin x| + 1 = \operatorname{tg} y, \\ |\sin y| + 1 = \operatorname{tg} x. \end{cases}$

Решение: Функции $|\sin x|$ и $\operatorname{tg} x$ — периодические функции периода π. Поэтому $x = x_0$, $y = y_0$ является решением системы лишь тогда, когда $x = x_0 + n\pi$, $y = y_0 + m\pi$ будет решением системы при всех $n, m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, систему уравнений достаточно решить при условии, что $x, y \in (-\pi/2; \pi/2)$.

Пусть $x, y \in (-\pi/2; \pi/2)$. Так как $\operatorname{tg} x \geq 1$, $\operatorname{tg} y \geq 1$, то $x, y \in [\pi/4; \pi/2)$. В этом случае система записывается как

$$\begin{cases} \sin x + 1 = \operatorname{tg} y, \\ \sin y + 1 = \operatorname{tg} x. \end{cases} \tag{1}$$

На промежутке $[\pi/4; \pi/2)$ функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ строго возрастающие. Из равенства

$$\sin x + \operatorname{tg} x = \sin y + \operatorname{tg} y$$

следует, что $y = x$. Поэтому решение системы (1) сводится к решению уравнения

$$\sin x + 1 = \operatorname{tg} x$$

на промежутке $[\pi/4; \pi/2)$. Уравнение представляется как

$$\sin x \cos x = \sin x - \cos x.$$

Положим $z = \sin x - \cos x$. Тогда

$$1 - z^2 = 2z$$

и, значит, $z = -1 + \sqrt{2}$. Решив уравнение

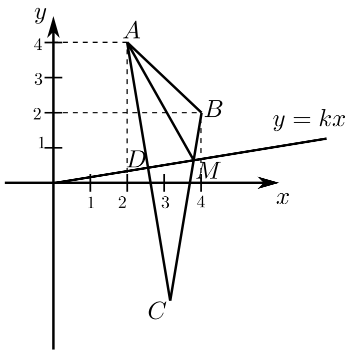
$$\sin x - \cos x = -1 + \sqrt{2},$$

находим, что $x = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{2-\sqrt{2}}{2}$. Поэтому решениями заданной системы будут $x = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{2-\sqrt{2}}{2} + n\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + \arcsin \frac{2-\sqrt{2}}{2} + m\pi$, где $n, m \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2} + n\pi$, $y = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2} + m\pi$, где $n, m \in \mathbb{Z}$.

Задача №10. На плоскости заданы точки $A(2,4)$, $B(4,2)$ и прямая $y = kx$ $(k > 0)$. Точка M принадлежит прямой $y = kx$. Найти треугольник $\triangle ABM$ с минимальным значением его периметра и вычислить значение периметра.

Решение: Задача не имеет решения при $k_1 \le k \le k_2$, где k_1 — угловой коэффициент прямой, проходящей через точку B, а k_2 — через точку A. Найдем эти значения.



$y = k_1x \quad x = 4, y = 2 \quad 2 = k4 \quad \Rightarrow \quad k_1 = \frac{1}{2}$

$y = k_2x \quad x = 2, y = 4 \quad \Rightarrow \quad k_2 = 2$

При $2 \ge k \ge \frac{1}{2}$ решения нет.

Найдем решение при $\frac{1}{2} > k > 0$ и $k > 2$.

Отложим точку C, симметричную точке A относительно прямой $y = kx$, для этого из A опустим перпендикуляр на $y = kx$ и на нем найдем точку C такую, что $AD = DC$. Проводя прямую через точки C и B, найдем ее пересечение с прямой $y = kx$ (точка M). Треугольник $\triangle AMB$ — искомый треугольник, поскольку $AM + MB = AC$, а кратчайшее расстояние между точками — прямая. Найдем периметр этого треугольника: $P = AB + BC$. $AB = \sqrt{(4-2)^2 + (2-4)^2} = 2\sqrt{2}$.

Найдем координаты точки C. Для этого запишем уравнение прямой, проходящей через точку A перпендикулярно $y = kx$:
$y = -\frac{1}{k}x + b$, $x = 2, y = 4 \Rightarrow 4 = -\frac{2}{k} + b \Rightarrow b = \frac{4k+2}{k} \Rightarrow y = -\frac{1}{k}x + \frac{4k+2}{k}$ (AC)

Найдем координаты точки D:

$$\begin{cases} y = kx \\ y = -\frac{1}{k}x + \frac{4k+2}{k} \end{cases} \Rightarrow kx = -\frac{1}{k}x + \frac{4k+2}{k} \Rightarrow \begin{cases} x_D = \frac{4k+2}{k} : \frac{k^2+1}{k} = \frac{4k+2}{k^2+1} \\ y_D = k\frac{4k+2}{k^2+1} \end{cases}$$

Точка D — середина отрезка AC, тогда $x_C = 2x_D + x_A = \frac{2(4k+2)}{k^2+1} + 2$, $y_C = 2y_D + y_A = 2k\frac{4k+2}{k^2+1} + 4$.

Тогда длина $CB = \sqrt{\left[\frac{2(4k+2)}{k^2+1} + 2 - 4\right]^2 + \left[2k\frac{4k+2}{k^2+1} + 4 - 2\right]^2} =$
$= \sqrt{\left[\frac{2(4k+2)}{k^2+1} - 2\right]^2 + \left[2k\frac{4k+2}{k^2+1} + 2\right]^2}$.

$P = CB + AB = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{\left(\frac{4k+2-k^2-1}{k^2+1}\right)^2 + \left(\frac{k(4k+2)+k^2+1}{k^2+1}\right)^2} =$
$= 2\sqrt{2} + \frac{2}{k^2+1}\sqrt{(4k-k^2+1)^2 + (5k^2+2k+1)^2}$.

Ответ: $P = CB + AB = 2\sqrt{2} + \frac{2}{k^2+1}\sqrt{(4k-k^2+1)^2 + (5k^2+2k+1)^2}$.