САММАТ-2021
Решение задач 10 класса
2 вариант

Задача №1. Решите уравнение

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2020}{1-2020x}\right)-\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}(2020).$$

Решение: Запишем уравнение в виде

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2020}{1-2020x}\right)=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}(2020). \tag{1}$$

Так как знаки значений функции $y=\operatorname{tg}(x)$ совпадают со знаками ее аргумента, то с учетом ее возрастания на всей области определения заметим, что правая часть уравнения неотрицательна при $x\geq -2020$ и отрицательна при $x<-2020$.

Знаки левой части совпадают со знаками дроби $\frac{x+2020}{1-2020x}$, неотрицательной при $x\in\left[-2020;\frac{1}{2020}\right)$ и отрицательной при $x\in(-\infty;-2020)\cup\left(\frac{1}{2020};+\infty\right)$. Учитывая, что $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))\equiv x$, имеем

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2020}{1-2020x}\right)\right)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}(2020)),$$
$$\frac{x+2020}{1-2020x}=\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}(2020))}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(x))\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(2020))}=\frac{x+2020}{1-2020x}.$$

Это равенство возможно лишь при тех значениях x, при которых совпадают знаки правой и левой частей (1), то есть при $x\in\left[-2020;\frac{1}{2020}\right)$.

Ответ: $x\in\left[-2020;\frac{1}{2020}\right)$.

Задача №2. Известно, что приведенный квадратный трехчлен $f(x)=x^2+px+q$ имеет различные действительные корни. Сколько различных действительных корней может иметь уравнение $f(2021x)+f(2021x+\sqrt{p^2-4q})=0$?

Решение: Обозначим $D=p^2-4q$, $t=2021x$. Тогда

$$f(t)+f(t+\sqrt{D})=0$$
$$t^2+pt+q+(t+\sqrt{D})^2+p(t+\sqrt{D})+q=0$$
$$2t^2+2(p+\sqrt{D})t+2q+D+p\sqrt{D}=0.$$

$\frac{\tilde{D}}{4}=(p+\sqrt{D})^2-2(2q+D+p\sqrt{D})=p^2-4q-D=p^2-4q-(p^2-4q)=0.$ Следовательно, уравнение имеет один действительный корень.

Ответ: Один.

Задача №3. Числа a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6 и a_7 образуют геометрическую прогрессию, при этом среди них есть как рациональные числа, так и иррациональные. Какое наибольшее количество членов этой прогрессии могут быть рациональными числами? Ответ обосновать.

Решение: Пример: $a_1 = 1$, $q = \sqrt{2}$, получим геометрическую прогрессию $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8$. Если среди a_i есть 5 рациональных чисел, то найдутся два подряд идущих рациональных числа геометрической прогрессии. Это означает, что знаменатель прогрессии (отношения последующего члена к предыдущему) есть рациональное число. Но тогда при рациональном числе a_1 — все члены прогрессии есть рациональные числа, при иррациональном — все иррациональные. В случае, когда a_1 и q — оба иррациональные, то максимальное возможное количество рациональных чисел — 3. Пример: $a_1 = \sqrt{2}$, $q = \sqrt{2}$ ($\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, 8\sqrt{2}$).

Ответ: 4.

Задача №4. Докажите справедливость следующего неравенства

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2020}{2021!} < 1.$$

Решение: $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{2020}{2021!} = \frac{2-1}{2!} + \frac{3-1}{3!} + \frac{4-1}{4!} + \dots + \frac{2021-1}{2021!} = \frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} + \frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} + \frac{4}{4!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{2021}{2021!} - \frac{1}{2021!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{2021!} - \frac{1}{2021!} = 1 - \frac{1}{2021!} < 1.$

Задача №5. Вещественные числа α и β таковы, что $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 5\alpha - 17 = 0$ и $\beta^3 - 3\beta^2 + 5\beta + 11 = 0$. Найдите сумму чисел α и β.

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$. Эта функция строго возрастает, так как $f(x) = (x-1)^3 + 2(x-1)$ — сумма двух возрастающих функций, и поэтому каждое свое значение она принимает ровно один раз. График функции $y = f(x)$ имеет центр симметрии в точке $(1, 0)$ (это следует из нечетности функции $g(t) = t^3 + 2t$). Из условия задачи следует, что $f(\alpha) = 14$ и $f(\beta) = -14$. Значит, точки оси абсцисс с координатами α и β симметричны относительно $x = 1$, то есть $\alpha - 1 = 1 - \beta$ и $\alpha + \beta = 2$.

Ответ: 2.

Задача №6. Для любой пары чисел определена некоторая операция «$*$», удовлетворяющая следующим свойствам: $a * (b * c) = (a * b) \cdot c$ и $a * a = 1$, где операция «$\cdot$» — операция умножения. Найдите корень x уравнения: $x * 3 = 2020$.

Решение: Учитывая условие задачи, имеем $x * 1 = x * (x * x) = (x * x) \cdot x = 1 \cdot x = x$. Тогда

1) $(x * 3) \cdot 3 = 2021 \cdot 3 = 6060$,

2) $(x * 3) \cdot 3 = x * (3 * 3) = x \cdot 1 = x$.

Следовательно, $x = 6060$.

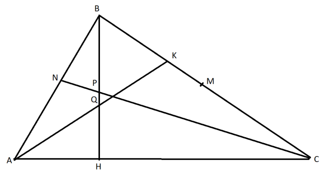
Ответ: 6060.

Задача №7. В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена медиана, из другой — биссектриса, из третьей — высота. Могут ли проведенные биссектриса и медиана разделить высоту на три равные части? Ответ объясните.

Решение: От противного. Пусть PH — высота, точка M — середина BC и $BP = PQ = QH$.

Рассмотрим 2 возможные ситуации:

1) CN — биссектриса $\Rightarrow BC : HC = BP : PH = 1 : 2 \Rightarrow BC < HC \Rightarrow$ противоречие, так как BC — гипотенуза в $\triangle BHC$.



2) CN — медиана $\Rightarrow N$ — середина $AB \Rightarrow$ точка P ниже средней линии $NM \Rightarrow BP > \frac{1}{2}BH \Rightarrow$ противоречие с тем, что $BP = \frac{1}{2}BH$.

Ответ: нет.

Задача №8. Решить уравнение

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-2} - 1} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-3} - 2} = \sqrt{x-2}.$$

Решение:

$$\sqrt{x - 2\sqrt{x-2} - 1} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-3} - 2} = \sqrt{x-2},$$
$$\sqrt{(x-2) - 2\sqrt{x-2} + 1} + \sqrt{(x-3) - 2\sqrt{x-3} + 1} = \sqrt{x-2},$$
$$\sqrt{(\sqrt{x-2} - 1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3} - 1)^2} = \sqrt{x-2},$$
$$|\sqrt{x-2} - 1| + |\sqrt{x-3} - 1| = \sqrt{x-2}.$$

Так как область допустимых значений данного уравнения задается условием: $x \geq 3$, то $\sqrt{x-2} \geq 1$, $|\sqrt{x-2} - 1| = \sqrt{x-2} - 1$ и $\sqrt{x-2} - 1 + |\sqrt{x-3} - 1| = \sqrt{x-2}$, $|\sqrt{x-3} - 1| = 1$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-3} - 1 = 1, \\ \sqrt{x-3} - 1 = -1, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x-3} = 2, \\ \sqrt{x-3} = 0, \end{array}\right.$
$\left[\begin{array}{l} x-3 = 4, \\ x-3 = 0, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x = 7, \\ x = 3, \end{array}\right.$

Ответ: $3; 7$.

Задача №9. Доказать, что при всех натуральных n число $3^{2n+3} + 40n - 27$ делится на 64.

Решение: Докажем методом математической индукции.

Во-первых, $3^{2k} - 1 = 9^k - 1$ делится на 8 при $\forall k \in \mathbb{N}$. Доказывается также методом математической индукции. Действительно $9^k - 1$ при $n = 1$ делится на 8. Пусть $9^k - 1$ делится на 8 при произвольном k. Рассмотрим $9^{k+1} - 1 = 9^k \cdot 9 - 1 = 9^k \cdot 8 + 9^k - 1 = 8 \cdot 9^k + (9^k - 1)$, оба слагаемых делятся на 8.

Рассмотрим основное выражение $3^{2n+3} + 40n - 27 = 27 \cdot 3^{2n} - 27 + 40n = 27(9^n - 1) + 40n$ при $n = 1$ выполняется деление на 64. Пусть это выражение делится на 64 при $\forall n > 1$. Рассмотрим это выражение при $(n+1)$. Имеем $27(9^{n+1} - 1) + 40(n+1) = 27(9^n \cdot (8+1) - 1) + 40n + 40 = 27(9^n - 1) + 27 \cdot 8 \cdot 9^n + 40n + 40 = [27(9^n - 1) + 40n] + 216 \cdot 9^n + 40n = [27(9^n - 1) + 40n] + [216(9^n - 1)] + 256$. Каждое из трех слагаемых делится на 64, первое — по предположению, второе — потому что 216 и $9^n - 1$ делятся на 8 каждое и 256 делится на 64. Утверждение доказано.

Задача №10. Решите в целых числах уравнение

$$4x^2 + 3y^2 + 5z^2 - 24y = 1.$$

Решение: перепишем уравнение в виде $4x^2 + 3(y-4)^2 + 5z^2 = 49$.

$4x^2 \leq 49 \Rightarrow |x| \leq 3$, так как x — целое.

$3(y-4)^2 \leq 49 \Rightarrow |y-4| \leq 4$, так как y — целое.

$5x^2 \leq 49 \Rightarrow |z| \leq 3$, так как z — целое.

В силу симметрии, сначала можно искать лишь тройки $(x; y; z)$, для которых $x \geq 0$; $y - 4 \geq 0$; $z \geq 0$. Такая будет только одна $(1; 4; 3)$ (перебор), а затем в силу симметрии записываем остальные $(-1; 4; 3)$, $(-1; 4; -3)$, $(1; 4; -3)$.

Ответ: $(1; 4; 3)$, $(-1; 4; 3)$, $(-1; 4; -3)$, $(1; 4; -3)$.