XXXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

6 класс

▷ **1** (10 баллов). Решить в натуральных числах уравнение $\overline{xxyy} = z^2$.

▷**2** (10 баллов). При подготовке к олимпиаде по математике Кирилл решил в пять раз больше задач, чем Максим, а количество задач, решенных Андреем, в n раз больше числа задач, решенных Максимом (n — натуральное число). Если количество задач, решенных Андреем, увеличить вчетверо, то их станет на 69 задач больше, чем у Кирилла. Какое число задач решил каждый из мальчиков, если Андрей решил больше 30 задач.

▷ **3** (10 баллов). Вместо букв поставьте цифры так, чтобы получилось верное равенство: $ABCCDEF + ABCCDEF = EFCAAFDB$.

▷ **4** (10 баллов). При каком наименьшем целом значении n выполняется неравенство: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n \geq 2024$.

▷**5** (10 баллов). В Древнем Египте обыкновенные дроби $\dfrac{m}{n}$ $(m < n)$ представляли в виде суммы аликвотных дробей вида $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \ldots + \dfrac{1}{k_n}$ $(k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n,$ $k_1 \geq 2, k_2 \geq 2, \ldots, k_n \geq 2)$. Например, $\dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{20}$. Представьте дроби $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{23}{40}$; $\dfrac{2}{17}$ в виде суммы трех аликвотных дробей $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3}$.

▷ **6** (10 баллов). Коля купил 4 книги. За все книги без первой он заплатил 420 рублей, за все книги без второй — 400 рублей, за все книги без третьей — 380 рублей, а за все книги без четвертой — 360 рублей. Сколько рублей заплатил Коля за третью книгу?

▷ **7** (10 баллов). Найдите наибольшее количество квартир в стоквартирном доме, суммы цифр номеров квартиры у которых одинаковы.

▷ **8** (10 баллов). При сложении всех трехзначных чисел, которые можно записать, не повторяя цифры в числе, получилось 4662. Запишите в ответе разность между наибольшим и наименьшим из получившихся трехзначных чисел.

▷ **9** (10 баллов). Любитель арифметики записал в ряд 2024 числа так, что сумма любых четырех соседних чисел равна 100. На первом месте стоит 11, на втором — 22, а на последнем — 33. Какое число стоит на третьем месте?

▷ **10** (10 баллов). Сравните числа

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{168} + \ldots + \frac{1}{1680} + \frac{1}{1848} + \frac{1}{2024} \quad \text{и} \quad \frac{6}{23}.$$

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

6 класс

▷ **1** (10 баллов). Решить в натуральных числах уравнение $\overline{xxyy} = z^2$.

▷**2** (10 баллов). При подготовке к олимпиаде по математике Кирилл решил в пять раз больше задач, чем Максим, а количество задач, решенных Андреем, в n раз больше числа задач, решенных Максимом (n — натуральное число). Если количество задач, решенных Андреем, увеличить вчетверо, то их станет на 69 задач больше, чем у Кирилла. Какое число задач решил каждый из мальчиков, если Андрей решил больше 30 задач.

▷ **3** (10 баллов). Вместо букв поставьте цифры так, чтобы получилось верное равенство: $ABCCDEF + ABCCDEF = EFCAAFDB$.

▷ **4** (10 баллов). При каком наименьшем целом значении n выполняется неравенство: $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \ldots + (-1)^{n+1} \cdot n \geq 2024$.

▷**5** (10 баллов). В Древнем Египте обыкновенные дроби $\dfrac{m}{n}$ $(m < n)$ представляли в виде суммы аликвотных дробей вида $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \ldots + \dfrac{1}{k_n}$ $(k_1 \neq k_2 \neq \ldots \neq k_n,$ $k_1 \geq 2, k_2 \geq 2, \ldots, k_n \geq 2)$. Например, $\dfrac{4}{5} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{20}$. Представьте дроби $\dfrac{2}{5}$; $\dfrac{23}{40}$; $\dfrac{2}{17}$ в виде суммы трех аликвотных дробей $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3}$.

▷ **6** (10 баллов). Коля купил 4 книги. За все книги без первой он заплатил 420 рублей, за все книги без второй — 400 рублей, за все книги без третьей — 380 рублей, а за все книги без четвертой — 360 рублей. Сколько рублей заплатил Коля за третью книгу?

▷ **7** (10 баллов). Найдите наибольшее количество квартир в стоквартирном доме, суммы цифр номеров квартиры у которых одинаковы.

▷ **8** (10 баллов). При сложении всех трехзначных чисел, которые можно записать, не повторяя цифры в числе, получилось 4662. Запишите в ответе разность между наибольшим и наименьшим из получившихся трехзначных чисел.

▷ **9** (10 баллов). Любитель арифметики записал в ряд 2024 числа так, что сумма любых четырех соседних чисел равна 100. На первом месте стоит 11, на втором — 22, а на последнем — 33. Какое число стоит на третьем месте?

▷ **10** (10 баллов). Сравните числа

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \frac{1}{48} + \frac{1}{80} + \frac{1}{120} + \frac{1}{168} + \ldots + \frac{1}{1680} + \frac{1}{1848} + \frac{1}{2024} \quad \text{и} \quad \frac{6}{23}.$$

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

7 класс

▷ **1** (10 баллов). В два кувшина одинакового веса налили разное количество воды, причем вес воды во втором кувшине на 500 г больше веса в первом кувшине. Из второго кувшина перелили воду в первый кувшин. В результате вес первого кувшина с водой оказался в 8 раз больше, чем вес второго пустого кувшина. Найти вес пустых кувшинов и вес воды, налитой первоначально в кувшины.

▷**2** (10 баллов). Каждый из двух братьев получил в подарок перед Рождеством по адвент-календарю с конфетами. Утром они съели по несколько конфет, и при этом так ими наелись, что больше уже целый день не ели сладости. Но вечером старший брат незаметно забрал треть оставшихся у младшего брата конфет себе, затем младший также незаметно забрал треть конфет старшего брата себе, и наконец, старший снова забрал треть конфет у младшего. В итоге у старшего брата осталось 14 конфет, а у младшего — 12. Сколько конфет было у каждого брата до того, как они начали забирать их друг у друга?

▷ **3** (10 баллов). Может ли трехзначное число, не кратное 10, быть в три раза больше числа, записанного из его цифр в обратном порядке? Ответ обоснуйте.

▷ **4** (10 баллов). Задан отрезок AE длиной 33. На отрезке AE заданы точки B, C, D такие, что длина отрезка BC в 1,5 раза больше длины отрезка AB, длина отрезка CD на 3 больше длины отрезка BC, а длина DE составляет 350% от длины AB. Сколько треугольников можно образовать, использовав в качестве их сторон отрезки AB, BC, CD и DE. В ответе привести количество треугольников и длины их сторон.

▷**5** (10 баллов). Цифры четырехзначного числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырехзначное число. Если из первого числа вычесть второе, то результат будет равен 4536. Найдите исходное четырехзначное число. Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

▷ **6** (10 баллов). В деревянном брусе с прямоугольным сечением со сторонами 50 см и 80 см и длиной 200 см закрашены две грани, а остальные не закрашены. Затем брус распилили параллельно граням на кубики с ребром 10 см. Найдите число получившихся после разрезания неокрашенных кубиков. Найти все решения.

▷ **7** (10 баллов). Найдите две последние цифры числа 2023^{2024}.

▷ **8** (10 баллов). В выставке-конкурсе художественного творчества принимали участие от 30 до 63 детей из 4 и 5 классов художественной школы. Каждый пятиклассник представил на конкурс по 12 рисунков, выполненных карандашом, и 5 пейзажей, выполненных красками, а четвероклассник по 2 рисунка и 6 пейзажей. Общее количество представленных рисунков и пейзажей оказалось одинаково. Сколько человек участвовало в конкурсе, если пятиклассников было больше 17?

▷ **9** (10 баллов). В составлении 40 задач приняло участие 30 студентов со всех 5 курсов. Любые два однокурсника придумали одинаковое число задач. Любые два студента с разных курсов придумали разное число задач. Сколько человек придумало 1 задачу?

▷ **10** (10 баллов). Два человека A и B должны попасть из пункта M в пункт N, расположенный в 15 км от M. Пешком они могут передвигаться со скоростью 6 км/ч. Кроме того, в их распоряжении есть велосипед, на котором можно ехать со скоростью 15 км/ч. A отправляется в путь пешком, а B выезжает одновременно с A и едет на велосипеде до встречи с пешеходом C, идущим из N в M. Дальше B идет пешком, а C едет на велосипеде до встречи с A и передает ему велосипед, на котором тот и приезжает в N. Когда должен выйти из N пешеход C, чтобы A и B прибыли в пункт N одновременно (если он идет пешком с той же скоростью, что A и B)?

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

8 класс

$\triangleright$ **1** (10 баллов). На доске записаны два приведенных квадратных уравнения с положительными дискриминантами. Для каждого уравнения ученик вычислил произведение корней и сумму квадратов его корней, записал эти четыре числа на доску в порядке возрастания и стер исходные уравнения. Какие уравнения были записаны изначально, если на доске остались числа 2, 3, 5 и 10? Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

$\triangleright$**2** (10 баллов). Известно, что если скорость товарного поезда была бы 21,75 км/час, то на заданное расстояние между двумя станциями он затратил бы на 7 часов больше, а при скорости $31\frac{1}{2}$ км/час на это расстояние он затратит на 1 час 40 минут меньше, чем он затрачивает при настоящей скорости движения. Найти настоящую скорость поезда и расстояние между станциями.

$\triangleright$ **3** (10 баллов). В шахматном турнире участвовали два ученика VII класса и некоторое число учеников VIII класса. По правилам шахматного турнира каждый из участников турнира играет с каждым по одной партии. Если один из играющих выигрывает партию, то он получает одно очко, а его противник получает ноль очков. В случае ничьей играющие получают по 1/2 очка. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все решения.

$\triangleright$ **4** (10 баллов). В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC, не меньше этих сторон соответственно. Найти углы треугольника.

$\triangleright$**5** (10 баллов). Определить, при каких r и s число $q = \dfrac{6^{r+s} \cdot 12^{r-s}}{8^r \cdot 9^{r+2s}}$ является целым и $q < 10^6$.

$\triangleright$ **6** (10 баллов). Задана система координат XOY с целочисленными значениями координат. В этой системе координат задана окружность, радиус которой равен 2. Пусть n — количество точек (с целочисленными координатами), лежащих внутри или на окружности. На какую наименьшую величину необходимо увеличить радиус, чтобы внутри или на окружности было $2n-5$ точек сетки?

$\triangleright$ **7** (10 баллов). Пусть a, b и c — положительные целые числа, такие что $\begin{cases} ab+bc+ca+2(a+b+c) = 405, \\ abc-a-b-c = -2. \end{cases}$ Найдите $a+b+c$.

$\triangleright$ **8** (10 баллов). Вычислите $\left(\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}\right)^6$.

$\triangleright$ **9** (10 баллов). Найти натуральное число $n > 1$, если известно, что числа 502, 661 и 873 при делении на n дают одинаковые остатки.

$\triangleright$ **10** (10 баллов). В шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы равны. Найти BC, если $AB = 9$, $DE = 3$, $EF = 7$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада
школьников по математике
«САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

8 класс

$\triangleright$ **1** (10 баллов). На доске записаны два приведенных квадратных уравнения с положительными дискриминантами. Для каждого уравнения ученик вычислил произведение корней и сумму квадратов его корней, записал эти четыре числа на доску в порядке возрастания и стер исходные уравнения. Какие уравнения были записаны изначально, если на доске остались числа 2, 3, 5 и 10? Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

$\triangleright$**2** (10 баллов). Известно, что если скорость товарного поезда была бы 21,75 км/час, то на заданное расстояние между двумя станциями он затратил бы на 7 часов больше, а при скорости $31\frac{1}{2}$ км/час на это расстояние он затратит на 1 час 40 минут меньше, чем он затрачивает при настоящей скорости движения. Найти настоящую скорость поезда и расстояние между станциями.

$\triangleright$ **3** (10 баллов). В шахматном турнире участвовали два ученика VII класса и некоторое число учеников VIII класса. По правилам шахматного турнира каждый из участников турнира играет с каждым по одной партии. Если один из играющих выигрывает партию, то он получает одно очко, а его противник получает ноль очков. В случае ничьей играющие получают по 1/2 очка. Два семиклассника набрали вместе 8 очков, а каждый из восьмиклассников набрал одно и то же число очков. Сколько восьмиклассников участвовало в турнире? Найти все решения.

$\triangleright$ **4** (10 баллов). В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC, не меньше этих сторон соответственно. Найти углы треугольника.

$\triangleright$**5** (10 баллов). Определить, при каких r и s число $q = \dfrac{6^{r+s} \cdot 12^{r-s}}{8^r \cdot 9^{r+2s}}$ является целым и $q < 10^6$.

$\triangleright$ **6** (10 баллов). Задана система координат XOY с целочисленными значениями координат. В этой системе координат задана окружность, радиус которой равен 2. Пусть n — количество точек (с целочисленными координатами), лежащих внутри или на окружности. На какую наименьшую величину необходимо увеличить радиус, чтобы внутри или на окружности было $2n-5$ точек сетки?

$\triangleright$ **7** (10 баллов). Пусть a, b и c — положительные целые числа, такие что $\begin{cases} ab+bc+ca+2(a+b+c) = 405, \\ abc-a-b-c = -2. \end{cases}$ Найдите $a+b+c$.

$\triangleright$ **8** (10 баллов). Вычислите $\left(\frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}\right)^6$.

$\triangleright$ **9** (10 баллов). Найти натуральное число $n > 1$, если известно, что числа 502, 661 и 873 при делении на n дают одинаковые остатки.

$\triangleright$ **10** (10 баллов). В шестиугольнике $ABCDEF$ все внутренние углы равны. Найти BC, если $AB = 9$, $DE = 3$, $EF = 7$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

9 класс

▷ **1** (10 баллов). Сравните значения выражений в зависимости от параметра t ($t \in \mathbb{R}$): $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots+\sqrt{30+\frac{1}{t^2+4t+\frac{163}{39}}}}}}$ и $\sqrt{37\left(1+\dfrac{|t|}{1+t^2}\right)}$.

▷**2** (10 баллов). Постройте график функции $y=\dfrac{4x^3+4x^2}{|x+2|-|3x+2|}$. С помощью построенного графика определите, при каких значениях параметра k уравнение $\dfrac{4x^3+4x^2}{|x+2|-|3x+2|}=k$ имеет нечетное количество различных решений.

▷ **3** (10 баллов). Какая точка на кривой, заданной уравнением $y^2+x^2-8y-10x+37=0$, ближе всего (находится на наименьшем расстоянии) к кривой, заданной уравнением $y^2+x^2-2x-2y+1=0$?

▷ **4** (10 баллов). Сумма первых 24 членов арифметической прогрессии равна 33, а сумма первых 24 членов другой арифметической прогрессии, имеющей тот же первый член, но противоположную по знаку разность, равна (-8). Найти первые члены этих прогрессий и разности обеих прогрессий.

▷**5** (10 баллов). При каких целых положительных m полином $P(x)=m^2x^{2024m+3}-25x^{m+1}+150x^{2023}$ делится на многочлен (x^2-1)?

▷ **6** (10 баллов). Сколько существует различных натуральных четырехзначных чисел, каждое из которых при прибавлении 6 делится на 7, при прибавлении 7 делится на 8, при прибавлении 8 делится на 9, при прибавлении 9 делится на 10? Ответ обосновать. Привести эти числа.

▷ **7** (10 баллов). Старательный ученик внимательно раскрыл скобки и привел все подобные слагаемые в выражении

$$(1+x^2+x^4+\dots+x^{30})^3+(1+x^3+x^6+\dots+x^{30})^3.$$

Сколько членов будет содержать многочлен, полученный этим учеником?

▷ **8** (10 баллов). На плоскости задан угол в 24°. С его использованием с помощью циркуля и линейки постройте угол в 9°.

▷ **9** (10 баллов). Три числа b_1, b_2, b_3 образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой q — натуральное число. Найти знаменатель, если $b_1=8$, а $2b_2-\dfrac{b_3}{2}>15$.

▷ **10** (10 баллов). Найдите площадь фигуры, каждая точка $(x;y)$ которой в прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяет неравенству

$$x^2+y^2\le 8|x|+6|y|.$$

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

9 класс

▷ **1** (10 баллов). Сравните значения выражений в зависимости от параметра t ($t \in \mathbb{R}$): $\sqrt{30+\sqrt{30+\sqrt{30+\dots+\sqrt{30+\frac{1}{t^2+4t+\frac{163}{39}}}}}}$ и $\sqrt{37\left(1+\dfrac{|t|}{1+t^2}\right)}$.

▷**2** (10 баллов). Постройте график функции $y=\dfrac{4x^3+4x^2}{|x+2|-|3x+2|}$. С помощью построенного графика определите, при каких значениях параметра k уравнение $\dfrac{4x^3+4x^2}{|x+2|-|3x+2|}=k$ имеет нечетное количество различных решений.

▷ **3** (10 баллов). Какая точка на кривой, заданной уравнением $y^2+x^2-8y-10x+37=0$, ближе всего (находится на наименьшем расстоянии) к кривой, заданной уравнением $y^2+x^2-2x-2y+1=0$?

▷ **4** (10 баллов). Сумма первых 24 членов арифметической прогрессии равна 33, а сумма первых 24 членов другой арифметической прогрессии, имеющей тот же первый член, но противоположную по знаку разность, равна (-8). Найти первые члены этих прогрессий и разности обеих прогрессий.

▷**5** (10 баллов). При каких целых положительных m полином $P(x)=m^2x^{2024m+3}-25x^{m+1}+150x^{2023}$ делится на многочлен (x^2-1)?

▷ **6** (10 баллов). Сколько существует различных натуральных четырехзначных чисел, каждое из которых при прибавлении 6 делится на 7, при прибавлении 7 делится на 8, при прибавлении 8 делится на 9, при прибавлении 9 делится на 10? Ответ обосновать. Привести эти числа.

▷ **7** (10 баллов). Старательный ученик внимательно раскрыл скобки и привел все подобные слагаемые в выражении

$$(1+x^2+x^4+\dots+x^{30})^3+(1+x^3+x^6+\dots+x^{30})^3.$$

Сколько членов будет содержать многочлен, полученный этим учеником?

▷ **8** (10 баллов). На плоскости задан угол в 24°. С его использованием с помощью циркуля и линейки постройте угол в 9°.

▷ **9** (10 баллов). Три числа b_1, b_2, b_3 образуют геометрическую прогрессию, знаменатель которой q — натуральное число. Найти знаменатель, если $b_1=8$, а $2b_2-\dfrac{b_3}{2}>15$.

▷ **10** (10 баллов). Найдите площадь фигуры, каждая точка $(x;y)$ которой в прямоугольной системе координат Oxy удовлетворяет неравенству

$$x^2+y^2\le 8|x|+6|y|.$$

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

10 класс

▷ **1** (10 баллов). При каких значениях параметра m уравнение

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m = 0$$

имеет 4 вещественных решения?

▷**2** (10 баллов). Найти значение $f(3)$, если для любого $x \neq 0$ справедливо равенство $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x$.

▷ **3** (10 баллов). Пусть α — решение (корень) уравнения $x^5 + x^4 = 1$. Найдите $S = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \dots$.

▷ **4** (10 баллов). Решите систему уравнений (n — натуральное число, отличное от единицы): $\begin{cases} x_1^2 - x_2x_3x_4\dots x_n = 0, \\ x_2^2 - x_1x_3x_4\dots x_n = 0, \\ x_3^2 - x_1x_2x_4\dots x_n = 0, \\ \dots \\ x_n^2 - x_1x_2x_3\dots x_{n-1} = 0. \end{cases}$

▷**5** (10 баллов). Найти сумму векторов с координатами $\{\cos 10°; \sin 10°\}$, $\{\cos 82°; \sin 82°\}$, $\{\cos 154°; \sin 154°\}$, $\{\cos 226°; \sin 226°\}$, $\{\cos 298°; \sin 298°\}$.

▷ **6** (10 баллов). Найти максимальную площадь четырехугольника, стороны которого равны 2, 3, 4 и 5.

▷ **7** (10 баллов). Боковые грани параллелепипеда — прямоугольники, а основание — параллелограмм с острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найдите отношение квадрата высоты параллелепипеда к площади его основания.

▷ **8** (10 баллов). Решить неравенство $2^x(2^x + 6x - 22) + 9x^2 - 66x + 85 < 0$.

▷ **9** (10 баллов). Рассматриваются всевозможные треугольники на плоскости Oxy, у которых одна из вершин — это точка $A(17, 7)$, другая вершина B — лежит на оси Ox, а третья вершина C — на прямой $y = x$. Найти наименьший периметр такого треугольника.

▷ **10** (10 баллов). Найти геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 + x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

10 класс

▷ **1** (10 баллов). При каких значениях параметра m уравнение

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + m = 0$$

имеет 4 вещественных решения?

▷**2** (10 баллов). Найти значение $f(3)$, если для любого $x \neq 0$ справедливо равенство $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x$.

▷ **3** (10 баллов). Пусть α — решение (корень) уравнения $x^5 + x^4 = 1$. Найдите $S = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \dots$.

▷ **4** (10 баллов). Решите систему уравнений (n — натуральное число, отличное от единицы): $\begin{cases} x_1^2 - x_2x_3x_4\dots x_n = 0, \\ x_2^2 - x_1x_3x_4\dots x_n = 0, \\ x_3^2 - x_1x_2x_4\dots x_n = 0, \\ \dots \\ x_n^2 - x_1x_2x_3\dots x_{n-1} = 0. \end{cases}$

▷**5** (10 баллов). Найти сумму векторов с координатами $\{\cos 10°; \sin 10°\}$, $\{\cos 82°; \sin 82°\}$, $\{\cos 154°; \sin 154°\}$, $\{\cos 226°; \sin 226°\}$, $\{\cos 298°; \sin 298°\}$.

▷ **6** (10 баллов). Найти максимальную площадь четырехугольника, стороны которого равны 2, 3, 4 и 5.

▷ **7** (10 баллов). Боковые грани параллелепипеда — прямоугольники, а основание — параллелограмм с острым углом α. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найдите отношение квадрата высоты параллелепипеда к площади его основания.

▷ **8** (10 баллов). Решить неравенство $2^x(2^x + 6x - 22) + 9x^2 - 66x + 85 < 0$.

▷ **9** (10 баллов). Рассматриваются всевозможные треугольники на плоскости Oxy, у которых одна из вершин — это точка $A(17, 7)$, другая вершина B — лежит на оси Ox, а третья вершина C — на прямой $y = x$. Найти наименьший периметр такого треугольника.

▷ **10** (10 баллов). Найти геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют равенству $x^2 + y^2 + x + y - 2\sqrt{x}\sqrt{y}(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 0$.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

11 класс

▷ **1** (10 баллов). Пусть z, u, v — положительные числа. При каких ограничениях на z, u, v существует конечное число положительных целых чисел (x, y), удовлетворяющих неравенству $vu^y < z^x$.

▷**2** (10 баллов). Найдите точки плоскости, обе координаты которых являются натуральными числами, меньшими двадцати, и через которые проходит график функции $y = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right)$. Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

▷ **3** (10 баллов). Найти решения неравенства

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} > \sqrt{1 + (\operatorname{tg} x - 1)^2},$$

принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

▷ **4** (10 баллов). Функция $f(n)$ определена для целых положительных чисел, удовлетворяет условию $f(1) = 1$ и двум соотношениям $f(3n) = 3f(n)$, $f(3n+1) = 9f(n)$. Найдите числа n, удовлетворяющие равенству $f(n) = 81$.

▷**5** (10 баллов). В $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{1}{8}$, биссектриса $AL = \frac{10}{3}$, $BC = 6$. Найти длины сторон AB и AC.

▷ **6** (10 баллов). Две смежные вершины квадрата лежат на параболе $y = x^2 - 4x + 5$, а две другие — на параболе $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a$. Найти наименьшую площадь этого квадрата при всевозможных значениях параметра a.

▷ **7** (10 баллов). Наудачу взятое целое положительное число N возведено в куб. Найти вероятность того, что полученное число оканчивается на 44. Выписать все двузначные числа, удовлетворяющие условию задачи.

▷ **8** (10 баллов). Величина z является корнем уравнения $x^5 + x^4 = 1$. Вычислить величину $S = \prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)(1+z^{16})\cdot\ldots$

▷ **9** (10 баллов). В куб с ребром $a = 60$ вписаны три сферы одинакового радиуса r так, что сферы попарно касаются друг друга, каждой грани куба касается какая-то сфера и каждая сфера касается как минимум двух граней куба. Найти возможные значения радиуса r, если известно, что r — натуральное число.

▷ **10** (10 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-1} - \sqrt{x}} - \sqrt[4]{2x-1} - \sqrt[4]{3x-1} + \sqrt[4]{x} = 0.$$

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!

XXXII Межрегиональная олимпиада школьников по математике «САММАТ-2024»

Заключительный тур

10 марта 2024 года

11 класс

▷ **1** (10 баллов). Пусть z, u, v — положительные числа. При каких ограничениях на z, u, v существует конечное число положительных целых чисел (x, y), удовлетворяющих неравенству $vu^y < z^x$.

▷**2** (10 баллов). Найдите точки плоскости, обе координаты которых являются натуральными числами, меньшими двадцати, и через которые проходит график функции $y = 4\sin^2\left(\frac{\pi x}{12}\right)$. Укажите все возможные варианты и объясните, почему нет других вариантов.

▷ **3** (10 баллов). Найти решения неравенства

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x} > \sqrt{1 + (\operatorname{tg} x - 1)^2},$$

принадлежащие интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

▷ **4** (10 баллов). Функция $f(n)$ определена для целых положительных чисел, удовлетворяет условию $f(1) = 1$ и двум соотношениям $f(3n) = 3f(n)$, $f(3n+1) = 9f(n)$. Найдите числа n, удовлетворяющие равенству $f(n) = 81$.

▷**5** (10 баллов). В $\triangle ABC$ $\cos A = \frac{1}{8}$, биссектриса $AL = \frac{10}{3}$, $BC = 6$. Найти длины сторон AB и AC.

▷ **6** (10 баллов). Две смежные вершины квадрата лежат на параболе $y = x^2 - 4x + 5$, а две другие — на параболе $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a$. Найти наименьшую площадь этого квадрата при всевозможных значениях параметра a.

▷ **7** (10 баллов). Наудачу взятое целое положительное число N возведено в куб. Найти вероятность того, что полученное число оканчивается на 44. Выписать все двузначные числа, удовлетворяющие условию задачи.

▷ **8** (10 баллов). Величина z является корнем уравнения $x^5 + x^4 = 1$. Вычислить величину $S = \prod\limits_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)(1+z^{16})\cdot\ldots$

▷ **9** (10 баллов). В куб с ребром $a = 60$ вписаны три сферы одинакового радиуса r так, что сферы попарно касаются друг друга, каждой грани куба касается какая-то сфера и каждая сфера касается как минимум двух граней куба. Найти возможные значения радиуса r, если известно, что r — натуральное число.

▷ **10** (10 баллов). Решить уравнение

$$\sqrt{\sqrt{2x-1} + \sqrt{3x-1} - \sqrt{x}} - \sqrt[4]{2x-1} - \sqrt[4]{3x-1} + \sqrt[4]{x} = 0.$$

ЖЕЛАЕМ УСПЕХА!!!