САММАТ-2023
Решение задач 7 класса

Задача №1. Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$39^x = 1521\left[39^{x-2} + \frac{1}{39x}\right] - y.$$

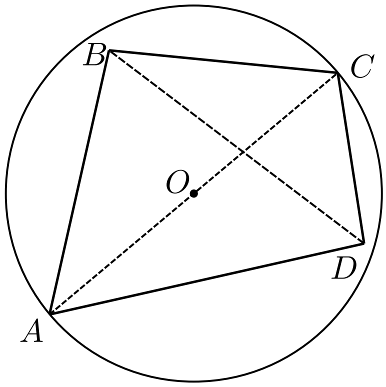
Решение:

$$39^x = 39^2\left[39^{x-2} + \frac{1}{39x}\right] - y$$
$$39^x = 39^x + \frac{39}{x} - y$$
$$xy = 39$$

Отсюда имеем $\begin{cases} x = 1, y = 39 \\ x = 39, y = 1 \\ x = 3, y = 13 \\ x = 13, y = 3 \end{cases}$

Ответ: $(1, 39)$, $(39, 1)$, $(3, 13)$, $(13, 3)$.

Задача №2. В четырехугольнике даны три угла $91°$, $97°$ и $101°$. Диагональ четырехугольника, выходящая из вершины четвертого угла, равна 2022 см. Может ли в этом четырехугольнике длина второй диагонали быть 2023 см?



Решение: Один из данных тупых углов лежит на окружности, а два других тупых угла лежат внутри круга. Диагональ BD, соединяющая их вершины, является частью хорды окружности, следовательно, она меньше диаметра — наибольшей из хорд, равной 2022 см (по условию).

Ответ: $|BD| < 2022$ см не может быть равной 2023 см.

Задача №3. Известно, что $\dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x+z} + \dfrac{1}{y+z} = \dfrac{9}{10}$, $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} + \dfrac{z}{x+y} = \dfrac{51}{10}$. Найти $x + y + z$.

Решение: $\dfrac{x}{y+z} + \dfrac{y}{x+z} + \dfrac{z}{x+y} = \dfrac{51}{10} \Longrightarrow$

$1 + \dfrac{x}{y+z} + 1 + \dfrac{y}{x+z} + 1 + \dfrac{z}{x+y} = \dfrac{51}{10} + 3 = \dfrac{81}{10} \Longrightarrow$

$(x+y+z)\underbrace{\left(\dfrac{1}{y+z} + \dfrac{1}{x+z} + \dfrac{1}{x+y}\right)}_{\frac{9}{10}} = \dfrac{81}{10} \Longrightarrow x + y + z = \dfrac{81}{10} : \dfrac{9}{10} = 9.$

Ответ: 9.

Задача №4. Сколько различных пар взаимно простых натуральных чисел m и n $(m > n)$ существует таких, что частное многочленов $m^3 - m^2 + m^2n - n^2m + n^2 - n^3$ и $m^2 - n^2$ равно 17? В ответе укажите пары таких чисел.

Решение: Запишем частное двух многочленов в виде дроби и сократим ее, предварительно разложим множители числителя способом группировки:

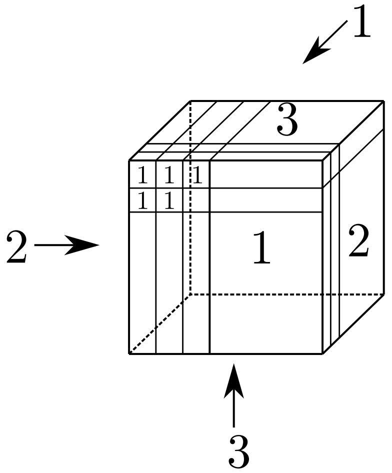
$$\frac{m^3 - m^2 + m^2n - n^2m + n^2 - n^3}{m^2 - n^2} =$$
$$= \frac{(m^3 + m^2n) + (-n^2m - n^3) + (-m^2 + n^2)}{m^2 - n^2} =$$
$$= \frac{m^2(m+n) - n^2(m+n) - (m^2 - n^2)}{m^2 - n^2} = \frac{(m^2 - n^2)(m+n) - (m^2 - n^2)}{m^2 - n^2} =$$
$$= \frac{(m^2 - n^2)(m + n - 1)}{m^2 - n^2} = m + n - 1$$

Так как частное равно 17, получаем $m + n - 1 = 17 \Rightarrow m + n = 18$. Рассмотрим возможные пары натуральных чисел, сумма которых равна 18 (первое слагаемое больше второго), и отберем из них пары с взаимно простыми слагаемыми:

$$\begin{array}{llll} 17+1 \ \surd & 16+2 \ \times & 15+3 \ \times & 14+4 \ \times \\ 13+5 \ \surd & 12+6 \ \times & 11+7 \ \surd & 10+8 \ \times \end{array}$$

Ответ: 3 пары: $m = 17$, $n = 1$; $m = 13$, $n = 5$; $m = 11$, $n = 7$.

Задача №5. Есть куб 7×7, составленный из маленьких кубиков 1×1. У куба три пары противоположных граней. Пронумеруем их: 1, 2, 3. На каждой грани маленьких кубиков написали номер той пары граней куба, которой она принадлежит (см. рис.). Затем куб разобрали и на мелкие кубики. У скольких кубиков сумма цифр на гранях четная (кубики, у которых вообще нет цифр на гранях, не считать)?



Решение: Посчитаем, сколько таких кубиков,, у которых только на одной грани цифра. Сумма цифр на гранях четная, следовательно, это цифра 2. Для каждой грани куба у нас 25 кубиков с пронумерованной только одной гранью, это «внутренний» квадрат 5×5. Значит, всего кубиков только с одной пронумерованной гранью, где стоит цифра 2, у нас $25 \cdot 2 = 50$.

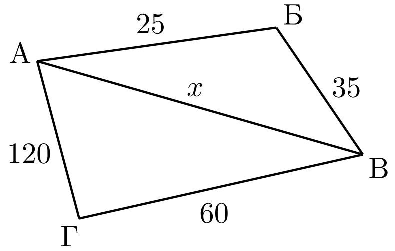
Теперь будем искать нужные нам кубики среди тех, у которых две пронумерованные грани. У кубика сумма на гранях четная, если цифры на гранях — это 1 и 3. Каждому ребру между гранями куба с цифрами 1 и 3 соответствуют 5 таких кубиков. Всего таких ребер 4. Значит, в данном случае мы нашли $4 \cdot 5 = 20$ кубиков.

Теперь рассмотрим кубики, у которых три пронумерованные грани. Таких кубиков 8, столько же, сколько вершин. Но каждый из них нам подходит, так как сумма цифр на гранях равна $1 + 2 + 3 = 6$ — четное число.

В итоге получили $50+20+8=78$ кубиков.

Ответ: 78.

Задача №6. На карте нанесены 4 населенных пункта А, Б, В, Г. Расстояние от города А до города Б по прямой 25 км, расстояние от города Б до города В по прямой 35 км, от города В до города Г по прямой — 60 км, а от города А до города Г по прямой — 120 км. Какое время велосипедист затратил бы на прохождение пути по прямой от А до В, если его скорость 10 км/час?



Решение: Найдем x. Из неравенств треугольников имеем

$$\begin{cases} x \leq 60 \\ x+60 \geq 120 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x \leq 60 \\ x \geq 60 \end{cases} \Longrightarrow x = 60.$$

Расстояние АВ — 60 км. Тогда $t = \dfrac{S}{V} = \dfrac{60}{10} = 6$ час.

Ответ: 6 часов.

Задача №7. Ученик купил ручки по 2 рубля за штуку и карандаши по 3 рубля за штуку. Если бы ручки стоили по 3 рубля за штуку, а карандаши по 4 рубля, то ему пришлось бы заплатить на 16 рублей больше, а если бы ручки стоили 4 рубля, а карандаши — по 1 рублю, то тогда бы он заплатил на 4 рубля меньше. Сколько ручек и карандашей купил ученик и на какую сумму?

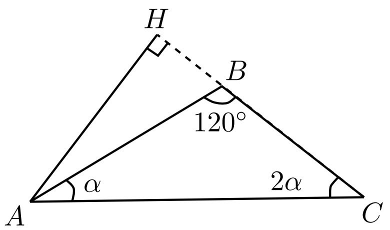
Решение:

$$\begin{cases} 2x+3y=z \\ 3x+4y=z+16 \\ 4x+y=z-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=2x+3y+16 \\ 4x+y=2x+3y-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=16 \\ x-y=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=9 \end{cases}$$

$2x+3y=7\cdot 2+3\cdot 9=41$.

Ответ: ручек — 7, карандашей — 9, сумма покупки — 41 рубль.

Задача №8. В треугольнике $\triangle ABC$ проведена высота AH из угла $\angle A$. $\angle B = 120°$, $\angle C = 2\cdot\angle A$. Найдите угол между высотой AH и стороной AC.



Решение: Имеем:

1) $\angle A + \angle C = 180° - \angle B = 60°$ (по теореме о сумме углов треугольника);

2) $\angle C = 2\cdot\angle A$, тогда $60° : 3 = 20° = \angle A$ и $\angle C = 2\cdot 20° = 40°$;

3) $\angle ABH = 180° - \angle B = 60°$ (по свойству смежных углов);

4) $\angle BAH = 90° - \angle ABH = 90° - 60° = 30°$ (по теореме о сумме углов треугольника);

5) $\angle HAC = \angle BAH + \angle BAC = 20° + 30° = 50°$.

Ответ: 50°.

Задача №9. Задана величина

$$m = \frac{1}{1686} + \frac{1}{1687} + \frac{1}{1688} + \ldots + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2022}.$$

Докажите, что $\dfrac{1}{6} < m < \dfrac{1}{5}$.

Решение: Сумма с правой части содержит 337 убывающих по величине слагаемых. Поэтому, если каждое из них взять равным наименьшему, т.е. $\dfrac{1}{2022}$, то получим $337 \cdot \dfrac{1}{2022} = \dfrac{1}{6}$. Следовательно, данная сумма m заведомо больше, чем $\dfrac{1}{6}$.

Если же каждое из них взять равным наибольшему слагаемому $\dfrac{1}{1686}$, то получим $337 \cdot \dfrac{1}{1686} = 0,9988\ldots < 0,2 = \dfrac{1}{5}$, т.е. данная сумма меньше, чем $\dfrac{1}{5}$.

Задача №10. На кольцевой линии метро курсируют 24 поезда. Они следуют в одном направлении с одинаковыми скоростями и равными интервалами. Сколько поездов надо добавить, чтобы при той же скорости уменьшить интервалы на 20%?

Решение: S — длина кольцевой линии; $S/24$ — длина пути между поездами. Время, затраченное на этот путь $t = \dfrac{S}{24V}$ (V — скорость). Поскольку интервал уменьшился на 20%, то имеем аналогичное соотношение $\dfrac{4}{5}t = \dfrac{S}{nV}$ (n — новое количество поездов).
$\dfrac{4}{5}\dfrac{S}{24V} = \dfrac{S}{nV} \Rightarrow \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{n} \Rightarrow n = 30$. Значит нужно добавить $30 - 24 = 6$ поездов.

Ответ: 6.