САММАТ-2022
Решение задач 9 класса

Задача №1. Решить уравнение $x^4 - 8\sqrt{3}x^3 + 66x^2 - 72\sqrt{3}x + 81 = 0$.

Решение: Сделаем замену переменной по формуле $x = \sqrt{3}y$, тогда уравнение примет вид

$$9y^4 - 8\sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3}y^3 + 66 \cdot 3y^2 - 72\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}y + 81 = 0,$$
$$y^4 - 8y^3 + 22y^2 - 24y + 9 = 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнение имеет корень $y = 1$, поскольку сумма его коэффициентов равна $1 - 8 + 22 - 24 + 9 = 32 - 32 = 0$.

Поделим многочлен $y^4 - 8y^3 + 22y^2 - 24y + 9$ на двучлен $y - 1$ по схеме Горнера, получим

	y^4	y^3	y^2	y^1	y^0
	1	-8	22	-24	9
$y = 1$	1	-7	15	-9	0
	y^3	y^2	y^1	y^0	

поэтому полученное уравнение примет вид

$$(y - 1)(y^3 - 7y^2 + 15y - 9) = 0.$$

Уравнение $y^3 - 7y^2 + 15y - 9 = 0$ также имеет корень $y = 1$, поскольку сумма его коэффициентов равна $1 - 7 + 15 - 9 = 16 - 16 = 0$. Снова поделим многочлен $y^3 - 7y^2 + 15y - 9$ на двучлен $y - 1$ по схеме Горнера, получим

	y^3	y^2	y^1	y^0
	1	-8	15	-9
$y = 1$	1	-6	9	0
	y^2	y^1	y^0	

поэтому полученное уравнение примет вид

$$(y - 1)(y - 1)(y^2 - 6y + 9) = 0, \quad \Leftrightarrow \quad (y - 1)^2(y - 3)^2 = 0.$$

Таким образом, полученное уравнение имеет кратные корни $y_1 = 1$ и $y_2 = 3$. Тогда исходное уравнение имеет кратные корни $x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $x_1 = \sqrt{3}$, $x_2 = 3\sqrt{3}$.

Задача №2. Выясните, каким числом (рациональным или иррациональным) является значение числового выражения:

$$\frac{(\sqrt{\sqrt{20} - 4} + \sqrt{\sqrt{20} + 4})^2}{\sqrt{(4 - \sqrt{20})^2}} - 3\sqrt{20}.$$

Решение: $\dfrac{(\sqrt{\sqrt{20} - 4} + \sqrt{\sqrt{20} + 4})^2}{\sqrt{(4 - \sqrt{20})^2}} - 3\sqrt{20} =$

$$= \frac{\sqrt{20} - 4 + 2\sqrt{(\sqrt{20} - 4)(\sqrt{\sqrt{20} + 4})} + \sqrt{20} + 4}{|4 - \sqrt{20}|} - 3\sqrt{20} =$$

$$= \frac{2\sqrt{20}+4}{\sqrt{20}-4} - 3\sqrt{20} = \frac{2\sqrt{20}+4-3\sqrt{20}(\sqrt{20}-4)}{\sqrt{20}-4} = \frac{14\sqrt{20}-56}{\sqrt{20}-4} = \frac{14(\sqrt{20}-4)}{\sqrt{20}-4} = 14$$

$\Rightarrow$ рац.число.

Ответ: рациональное число.

Задача №3. В треугольнике $\triangle ABC$ на сторонах BC, AC, AB отметили точки D, E, F соответственно так, что $AF : FB = BD : DC = CE : EA = 2 : 3$. Отрезки AD, BE, CF попарно пересекаются в точках P, Q, R. Площадь треугольника $\triangle ABC$ равна $S_{\triangle ABC} = 19$. Найдите площадь треугольника $\triangle PQR$.

Решение: Решим задачу в общем случае. Пусть справедливы равенства $AF : FB = BD : DC = CE : EA = a : b$, где $a \le b$ (случай $a > b$ рассматривается аналогично). Пусть отрезки AD и BE пересекаются в точке P, отрезки BE и CF пересекаются в точке Q, отрезки AD и CF пересекаются в точке R.

По теореме Менелая для треугольника $\triangle BCE$ и секущей AD получаем

$$\frac{BP}{PE} \cdot \frac{EA}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} = 1, \Rightarrow \frac{BP}{PE} \cdot \frac{b}{a+b} \cdot \frac{b}{a} = 1, \Rightarrow \frac{BP}{PE} = \frac{a+b}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a(a+b)}{b^2}.$$

Из поворотной симметрии также вытекают аналогичные соотношения

$$\frac{AR}{RD} = \frac{CQ}{QF} = \frac{a(a+b)}{b^2}.$$

Справедливо соотношение части BP ко всему отрезку $BE = BP + PE$ в виде

$$\frac{BP}{PE} = \frac{a(a+b)}{b^2}, \Rightarrow \frac{BP}{BE} = \frac{BP}{BP+PE} = \frac{a(a+b)}{a(a+b)+b^2} = \frac{a(a+b)}{a^2+ab+b^2}.$$

По теореме Менелая для треугольника $\triangle ABE$ и секущей CF получаем

$$\frac{BQ}{QE} \cdot \frac{EC}{CA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1, \Rightarrow \frac{BQ}{QE} \cdot \frac{a}{a+b} \cdot \frac{a}{b} = 1, \Rightarrow \frac{BQ}{QE} = \frac{a+b}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b(a+b)}{a^2}.$$

Из поворотной симметрии также вытекают аналогичные соотношения

$$\frac{AP}{PD} = \frac{CR}{RF} = \frac{b(a+b)}{a^2}.$$

Справедливо соотношение части QE ко всему отрезку $BE = BQ + QE$ в виде

$$\frac{QE}{BQ} = \frac{a^2}{b(a+b)}, \Rightarrow \frac{QE}{BE} = \frac{QE}{BQ+QE} = \frac{a^2}{b(a+b)+a^2} = \frac{a^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Следовательно, также справедливо соотношение другой части PQ ко всему отрезку BE в виде

$$\frac{PQ}{BE} = 1 - \frac{BP}{BE} - \frac{QE}{BE} = 1 - \frac{a(a+b)}{a^2+ab+b^2} - \frac{a^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{b^2-a^2}{a^2+ab+b^2}.$$

Пусть теперь площадь треугольника $\triangle ABC$ равна $S_{\triangle ABC} = S$. Треугольник $\triangle ADC$ имеет с треугольником $\triangle ABC$ общее основание AC, значит, их площади относятся как $\frac{DC}{BC}$, следовательно

$$S_{\triangle ADC} = \frac{DC}{BC} \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{b}{a+b} \cdot S.$$

Треугольники $\triangle APE$ и $\triangle ADC$ имеют общий угол $\angle CAD = \angle EAP$, значит, их площади относятся как $\dfrac{AP}{AD}\cdot\dfrac{AE}{AC}$, следовательно

$$S_{\triangle APE} = \frac{AP}{AD}\cdot\frac{AE}{AC}\cdot S_{\triangle ADC} = \frac{b(a+b)}{a^2+ab+b^2}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}\cdot S = \frac{b^3}{(a^2+ab+b^2)(a+b)}\cdot S.$$

Наконец, треугольники $\triangle PQR$ и $\triangle APE$ имеют общий угол $\angle RPQ = \angle APE$, значит, их площади относятся как $\dfrac{PR}{AP}\cdot\dfrac{PQ}{PE}$, следовательно

$$S_{\triangle PQR} = \frac{PR}{AP}\cdot\frac{PQ}{PE}\cdot S_{\triangle APE} = \frac{b^2-a^2}{b(a+b)}\cdot\frac{b^2-a^2}{b^2}\cdot\frac{b^3}{(a^2+ab+b^2)(a+b)}\cdot S = \frac{(b-a)^2}{a^2+ab+b^2}\cdot S.$$

Тогда при $a = 2$, $b = 3$ и $S = S_{\triangle ABC} = 19$ получаем, что искомая площадь треугольника $\triangle PQR$ равна

$$S_{\triangle PQR} = \frac{(b-a)^2}{a^2+ab+b^2}\cdot S = \frac{(3-2)^2}{2^2+2\cdot 3+3^2}\cdot 19 = \frac{1}{19}\cdot 19 = 1.$$

Ответ: $S_{\triangle PQR} = 1$.

Задача №4. Докажите, что для последовательности чисел $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{25}$ выполняется следующее неравенство

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{23}+a_{24}+a_{25}}{a_5+a_{10}+a_{15}+a_{20}+a_{25}} < 5.$$

Решение: Так как $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{25}$, то $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5 < 5a_5$, $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10} < 5a_{10}$, $a_{11}+a_{12}+a_{13}+a_{14}+a_{15} < 5a_{15}$, $a_{16}+a_{17}+a_{18}+a_{19}+a_{20} < 5a_{20}$, $a_{21}+a_{22}+a_{23}+a_{24}+a_{25} < 5a_{25}$.

Сложив все пять неравенств и разделив на $a_5+a_{10}+a_{15}+a_{20}+a_{25}$, получим

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{23}+a_{24}+a_{25}}{a_5+a_{10}+a_{15}+a_{20}+a_{25}} < 5.$$

Задача №5. В кошельке в достаточном количестве купюры достоинством 100 и 200 рублей. Сколькими различными способами, извлекая купюры по одной, можно расплатиться за покупку, стоимостью 1800 рублей?

Решение: Рассмотрим количество вариантов для стоимости покупки 200, 300, 400, 500 и 600 рублей.

Для стоимости 200 рублей имеем варианты: $100+100$, 200, т.е. 2 варианта.

Для стоимости 300 рублей: $100+100+100$, $100+200$, $200+100$ — 3 варианта.

Для стоимости 400 рублей: $100+100+100+100$, $200+100+100$, $100+200+100$, $100+100+200$, $200+200$ — 5 вариантов.

Для стоимости 500 рублей: $100+100+100+100+100$, $100+100+100+200$, $100+100+200+100$, $100+200+100+100$, $200+100+100+100$, $200+100+200$, $200+200+100$, $100+200+200$ — 8 вариантов.

Можно показать (перебором), что для стоимости 600 рублей будет 13 вариантов.

Установим некоторую закономерность роста числа вариантов от стоимости. Составим таблицу

Стоимость	100	200	300	400	500	600
Количество вариантов	1	2	3	5	8	13

Нетрудно увидеть, что количество вариантов совпадает со значением ряда Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 114, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, ..., для которого выполняется

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \quad (n \geq 2), \quad u_1 = u_2 = 1.$$

Поэтому достаточно найти 18 член этого ряда, которому соответствует сумма 1800 рублей.

Ответ: 2584 варианта.

Задача №6. Четыре положительных числа a, b, c, d таковы, что $ab + cd = ac+bd = 4$ и $ad+bc = 5$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a+b+c+d$.

Решение: Используя неравенство о средних, получим

$$a + b + c + d \geq 2\sqrt{(a + b)(c + d)} = 2\sqrt{ac + ad + bc + bd} = 2\sqrt{4 + 5} = 6.$$

Равенство достигается при $a = d = 1$, $b = c = 2$. Все условия задачи выполняются.

Ответ: 6.

Задача №7. Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни. Имеет ли корни квадратный трехчлен $a^{2021}x^2 + b^{2021}x + c^{2021}$? Ответ обоснуйте.

Решение: Так как квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни, то $b^2 \geq 4ac$.

Если квадратный трехчлен $a^{2021}x^2 + b^{2021}x + c^{2021}$ имеет корни, то должно выполняться условие $b^{4042} \geq 4a^{2021}c^{2021}$ и обратно тоже верно.

Возведем неравенство $b^2 \geq 4ac$ в 2021 степень, получим $b^{4042} \geq 4^{2021}a^{2021}c^{2021}$. При $ac \geq 0$ $4^{2021}a^{2021}c^{2021} \geq 4a^{2021}c^{2021}$, а значит $b^{4042} \geq 4a^{2021}c^{2021}$. При $ac < 0$ $4^{2021}a^{2021}c^{2021} < 0$, $b^{4042} \geq 0$, а значит $b^{4042} \geq 4a^{2021}c^{2021}$. Следовательно, в любом случае $b^{4042} \geq 4a^{2021}c^{2021}$.

Таким образом, квадратный трехчлен $a^{2021}x^2 + b^{2021}x + c^{2021}$ имеет корни.

Ответ: да, имеет.

Задача №8. Для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2+bx+c$ выполняются условия: $f(0) + f(1) = 0$; $f(2) + f(3) = 0$. Найти корни уравнения $f(x) = 0$.

Решение: Из условий имеем

$$\begin{cases} a + b + 2c = 0 \\ 13z + 5b + 2c = 0 \end{cases}$$

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0$. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow$ из системы имеем: $12a + 4b = 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} = -3$ и $8a - 8c = 0 \Rightarrow \dfrac{c}{a} = 1$.

Тогда

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x_2 = 3 - x_1 \Rightarrow x_1(3 - x_1) = 1 \Rightarrow x_1^2 - 3x_1 + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Поскольку x_1 и x_2 входят симметрично, то корнями уравнения $f(x) = 0$ являются числа $\left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} x_1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \\ x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$.

Задача №9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 48 \\ xy - 2z^2 - 4u^2 = 576 \end{cases}$$

Решение: $\begin{cases} x + y = 48 \\ xy = 576 + 2z^2 + 4u^2 \end{cases}$ x, y — корни уравнения

$$z^2 - 48z + 576 + 2z^2 + 4u^2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = 24 \pm \sqrt{576 - (576 + 2z^2 + 4u^2)}.$$

Для существования решения $z = u = 0$. Тогда $z_{1,2} = 24$, т.е. $x = y = 24$,.

Ответ: $\begin{cases} x = y = 24 \\ z = u = 0 \end{cases}$.

Задача №10. На доске выписаны целые числа от 1 до 10. Игорь и Матвей на листках выписывают некоторые из написанных на доске чисел (хотя бы по одному числу). Какова вероятность того, что найдется хотя бы одно число, которое назовут оба мальчика, когда будут зачитывать выбранные числа?

Решение: Найдем вероятность $\overline{P}$ противоположного события, состоящего в том, что мальчики напишут на листках разные числа. Вероятность $\overline{P}$ найдем по формуле классической вероятности $\overline{P} = \dfrac{M}{N}$, где M — число вариантов, при которых мальчики напишут на листках разные числа, а N — общее число возможных вариантов.

Каждый из мальчиков может написать любое из 10 чисел $1, 2, 3, \ldots, 10$, а может и не написать, поэтому для каждого из мальчиков всего имеется $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{10} = 2^{10}$ возможностей сделать выбор написанных чисел. При этом в этом количестве также подсчитан вариант, когда мальчик не напишет никакого числа. По условию каждый мальчик должен написать хотя бы одно число, поэтому из этого количества нужно вычесть единицу. Таким образом, общее число возможных вариантов равно

$$N = (2^{10} - 1) \cdot (2^{10} - 1) = (2^{10} - 1)^2 = 4^{10} - 2 \cdot 2^{10} + 1 = 4^{10} - 2^{11} + 1.$$

Теперь подсчитаем число благоприятных вариантов. Пусть первый мальчик выбрал какие-то k чисел, где $k = 1, 2, 3, \ldots, 10$, тогда число способов выбрать эти k

чисел равно числу сочетаний из 10 по k, то есть C_{10}^k. В каждом таком случае второй мальчик может как угодно выбирать числа из оставшихся $10-k$ чисел, при этом он может написать любое из $10-k$ чисел, а может и не написать, поэтому для него всего имеется $\underbrace{2\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2}_{10-k} = 2^{10-k}$ возможностей сделать выбор написанных чисел. При этом в этом количестве также подсчитан вариант, когда второй мальчик не напишет никакого числа. По условию каждый мальчик должен написать хотя бы одно число, поэтому из этого количества нужно вычесть единицу, то есть рассмотреть число $2^{10-k}-1$. Таким образом, число благоприятных вариантов равно сумме произведений

$$M = \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k \cdot (2^{10-k}-1) = \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} - \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k.$$

По формуле Бинома Ньютона справедливо равенство

$$\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot a^{10-k} \cdot b^k = (a+b)^{10},$$

поэтому выражение для числа M можно упростить:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} - \sum_{k=1}^{10} C_{10}^k = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} - 2^{10} - \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k + 1 = \\ &= \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot 1^k - 2^{10} - \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k \cdot 1^{10-k} \cdot 1^k + 1 = (2+1)^{10} - 2^{10} - (1+1)^{10} + 1 = \\ &= 3^{10} - 2^{10} - 2^{10} + 1 = 3^{10} - 2\cdot 2^{10} + 1 = 3^{10} - 2^{11} + 1. \end{aligned}$$

Поэтому вероятность противоположного события равна

$$\overline{P} = \frac{M}{N} = \frac{3^{10} - 2^{11} + 1}{4^{10} - 2^{11} + 1}.$$

Тогда искомая вероятность по формуле вероятности противоположного события равна

$$P = 1 - \overline{P} = 1 - \frac{3^{10} - 2^{11} + 1}{4^{10} - 2^{11} + 1} = \frac{4^{10} - 2^{11} + 1 - (3^{10} - 2^{11} + 1)}{4^{10} - 2^{11} + 1} = \frac{4^{10} - 3^{10}}{4^{10} - 2^{11} + 1} \approx 0{,}9455.$$

Ответ: $P = \dfrac{4^{10} - 3^{10}}{(4^{10} - 2^{11} + 1} \approx 0{,}9455.$