САММАТ-2022
Решение задач 11 класса

Задача №1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(a,b,c)=\left(\frac{a+4b}{c}\right)^2+\left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2$$

при $a>0, b>0, c>0$.

Решение: Применим неравенство Коши

$$x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

для чисел

$$x=\left(\frac{a+4b}{c}\right)^2,\quad y=\left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2,\quad z=\left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2,$$

тогда

$$f(a,b,c)=\left(\frac{a+4b}{c}\right)^2+\left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2+\left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2\geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{a+4b}{c}\right)^2\left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2\left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2},$$

причем равенство будет справедливо лишь при условии, что $x=y=z$, то есть при условии, что

$$\left(\frac{a+4b}{c}\right)^2=\left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2=\left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2,$$

или

$$\frac{a+4b}{c}=\frac{2b+2c}{a}=\frac{c+2a}{2b},$$

или

$$\begin{cases}a^2+4ab=2bc+2c^2,\\ 2ab+8b^2=c^2+2ac,\\ 4b^2+4bc=ac+2a^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4ab-2bc=2c^2-a^2,\\ 2ab-2ac=c^2-8b^2,\\ 4bc-ac=+2a^2-4b^2.\end{cases}$$

Решим систему уравнений относительно произведений ab, ac, bc.

Умножим первое уравнение на 4, второе уравнение — на (-1), третье уравнение — на 2 и сложим, получим

$$16ab-8bc-2ab+2ac+8bc-2ac=8c^2-4a^2-c^2+8b^2+4a^2-8b^2,$$
$$14ab=7c^2,\quad 2ab=c^2.$$

Умножим первое уравнение на 2, второе уравнение — на (-4), третье уравнение — на 1 и сложим, получим

$$8ab-4bc-8ab+8ac+4bc-ac=4c^2-2a^2-4c^2+32b^2+2a^2-4b^2,$$
$$7ac=28b^2,\quad ac=4b^2.$$

Умножим первое уравнение на 1, второе уравнение — на (-2), третье уравнение — на 4 и сложим, получим

$$4ab-2bc-4ab+4ac+16bc-4ac=2c^2-a^2-2c^2+16b^2+8a^2-16b^2,$$
$$14bc=7a^2,\quad 2bc=a^2.$$

Поэтому получим эквивалентную систему уравнений

$$\begin{cases} 2ab = c^2, \\ ac = 4b^2, \\ 2bc = a^2. \end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе уравнение, учитывая условия $a > 0, b > 0, c > 0$, получим

$$\frac{2b}{c} = \frac{c^2}{4b^2}, \quad 8b^3 = c^3, \quad 2b = c.$$

Поделим первое уравнение на третье уравнение, получим

$$\frac{a}{c} = \frac{c^2}{a^2}, \quad a^3 = c^3, \quad a = c.$$

Поделим второе уравнение на третье уравнение, получим

$$\frac{a}{2b} = \frac{4b^2}{a^2}, \quad a^3 = 8b^3, \quad a = 2b.$$

Таким образом, получаем условие $a = 2b = c = t > 0$. При таких условиях функция $f(a, b, c)$ принимает значение, равное

$$f\left(t, \frac{t}{2}, t\right) = \left(\frac{t+2t}{t}\right)^2 + \left(\frac{t+2t}{t}\right)^2 + \left(\frac{t+2t}{t}\right)^2 =$$
$$= 3\sqrt[3]{\left(\frac{t+2t}{t}\right)^2 \left(\frac{t+2t}{t}\right)^2 \left(\frac{t+2t}{t}\right)^2} = 3\left(\frac{t+2t}{t}\right)^2 = 3 \cdot 3^2 = 27.$$

Покажем, что это значение является наименьшим значением функции $f(a, b, c)$ при всех $a > 0, b > 0, c > 0$. Для этого докажем неравенство $f(a, b, c) \geq 27$ при всех $a > 0, b > 0, c > 0$. Применим указанное выше неравенство Коши

$$x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

дважды:

$$f(a,b,c) = \left(\frac{a+4b}{c}\right)^2 + \left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2 \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{a+4b}{c}\right)^2 \left(\frac{2b+2c}{a}\right)^2 \left(\frac{c+2a}{2b}\right)^2} =$$
$$= 3\sqrt[3]{\frac{(a+4b)^2 \cdot (2b+2c)^2 \cdot (c+2a)^2}{c^2 \cdot a^2 \cdot 4b^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{(a+2b+2b)^2 \cdot (2b+c+c)^2 \cdot (c+a+a)^2}{c^2 \cdot a^2 \cdot 4b^2}} \geq$$
$$\geq 3\sqrt[3]{\frac{(3\sqrt[3]{a \cdot 2b \cdot 2b})^2 \cdot (3\sqrt[3]{2b \cdot c \cdot c})^2 \cdot (3\sqrt[3]{c \cdot a \cdot a})^2}{c^2 \cdot a^2 \cdot 4b^2}} = 3\sqrt[3]{\frac{3^6 \cdot a^2 \cdot 4b^2 \cdot c^2}{c^2 \cdot a^2 \cdot 4b^2}} = 3 \cdot 3^2 = 27.$$

Ответ: 27.

Задача №2. Решите неравенство:

$$4\Big(1 - \ln\Big(\frac{x}{2021}\Big)\Big)^{2020} + \Big(1 + \ln\Big(\frac{x}{2021}\Big)\Big)^{2022} \geq 2^{2022}.$$

Решение: Пусть $t = \ln\left(\dfrac{x}{2021}\right)$, тогда $4(1-t)^{2020} + (1+t)^{2022} \geq 2^{2022}$.

Рассмотрим случаи:

1) $t \geq 1 \Rightarrow 4(1-t)^{2020} + (1+t)^{2022} \geq (1+t)^{2022} \geq 2^{2022}$.

2) $t \leq -1 \Rightarrow 4(1-t)^{2020} + (1+t)^{2022} \geq 4(1-t)^{2020} \geq 2^{2022}$.

3) $-1 < t < 1 \Rightarrow 4(1-t)^{2020} + (1+t)^{2022} = 2^{2022}\left(\left(\dfrac{1-t}{2}\right)^{2020} + \left(\dfrac{1+t}{2}\right)^{2022}\right) < 2^{2022}\left(\dfrac{1-t}{2} + \dfrac{1+t}{2}\right) = 2^{2022}$, так как $0 < \dfrac{1-t}{2} < 1$, $0 < \dfrac{1+t}{2} < 1$ при $-1 < t < 1$. Следовательно, при $-1 < t < 1$ неравенство не выполнятся.

При $t \geq 1$ или $t \leq -1$ неравенство выполняется.

Тогда $\ln\left(\dfrac{x}{2021}\right) \geq 1$ или $\ln\left(\dfrac{x}{2021}\right) \leq -1$.

Следовательно, $x \in \left(0; \dfrac{2021}{e}\right] \cup [2021e; +\infty)$.

Ответ: $x \in \left(0; \dfrac{2021}{e}\right] \cup [2021e; +\infty)$.

Задача №3. В школе математики и программирования лестница с первого этажа на второй этаж состоит из двух пролетов, состоящих из 8 и 9 ступенек. Сколькими способами десятиклассник Вася может спуститься по ней, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки?

Решение 1: Найдем рекуррентную формулу, которая выражает число N_k способов для десятиклассника Васи спуститься по лестнице, состоящей из k ступенек, если он может шагать на следующую ступеньку, или перешагивать через ступеньку, или прыгать через две ступеньки.

Если $k = 0$, тогда у Васи имеется только единственный способ остаться на начальном месте — не шагать, поэтому $N_0 = 1$.

Если $k = 1$, тогда у Васи имеется только один способ спуститься по лестнице, состоящей из одной ступеньки, то есть шагнуть на следующую ступеньку с начальной нулевой ступеньки, то есть $N_1 = N_0 = 1$.

Если $k = 2$, тогда у Васи имеется два способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с первой ступеньки, на которую можно попасть одним способом, или перешагнуть через ступеньку с начальной нулевой ступеньки, то есть $N_2 = N_0 + N_1 = 1 + 1 = 2$.

Если $k = 3$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку со второй ступеньки, на которую можно попасть двумя способами, или перешагнуть через ступеньку с первой ступеньки, на которую можно попасть одним способом, или перешагнуть через две ступеньки с начальной нулевой ступеньки, то есть $N_3 = N_0 + N_1 + N_2 = 1 + 1 + 2 = 4$.

Если $k = 4$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с третьей ступеньки, на которую можно попасть $N_3 = 4$ способами, или перешагнуть через ступеньку со второй ступеньки, на которую можно попасть $N_2 = 2$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с первой ступеньки, на которую можно попасть $N_1 = 1$ способом, то есть

$$N_4 = N_1 + N_2 + N_3 = 1 + 2 + 4 = 7.$$

Если $k = 5$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с четвертой ступеньки, на которую можно попасть $N_4 = 7$ способами, или перешагнуть через ступеньку с третьей ступеньки, на которую можно попасть $N_3 = 4$ способами, или перешагнуть через две ступеньки со второй ступеньки, на которую можно попасть $N_2 = 2$ способом, то есть

$$N_5 = N_2 + N_3 + N_4 = 2 + 4 + 7 = 13.$$

Если $k = 6$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с пятой ступеньки, на которую можно попасть $N_5 = 13$ способами, или перешагнуть через ступеньку с четвертой ступеньки, на которую можно попасть $N_4 = 7$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с третьей ступеньки, на которую можно попасть $N_3 = 4$ способом, то есть

$$N_6 = N_3 + N_4 + N_5 = 4 + 7 + 13 = 24.$$

Если $k = 7$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с шестой ступеньки, на которую можно попасть $N_6 = 24$ способами, или перешагнуть через ступеньку с пятой ступеньки, на которую можно попасть $N_5 = 13$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с четвертой ступеньки, на которую можно попасть $N_4 = 5$ способом, то есть

$$N_7 = N_4 + N_5 + N_6 = 7 + 13 + 24 = 44.$$

Если $k = 8$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с седьмой ступеньки, на которую можно попасть $N_7 = 44$ способами, или перешагнуть через ступеньку с шестой ступеньки, на которую можно попасть $N_6 = 24$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с пятой ступеньки, на которую можно попасть $N_5 = 13$ способом, то есть

$$N_8 = N_5 + N_6 + N_7 = 13 + 24 + 44 = 81.$$

Наконец, если $k = 9$, тогда у Васи имеется три способа спуститься по лестнице, состоящей из двух ступенек, то есть шагнуть на следующую ступеньку с восьмой ступеньки, на которую можно попасть $N_8 = 81$ способами, или перешагнуть через ступеньку с седьмой ступеньки, на которую можно попасть $N_7 = 44$ способами, или перешагнуть через две ступеньки с шестой ступеньки, на которую можно попасть $N_6 = 24$ способом, то есть

$$N_9 = N_6 + N_7 + N_8 = 24 + 44 + 81 = 149.$$

Так как на каждом из двух пролетов лестницы десятиклассник Вася спускается отдельно от другого пролета, поэтому нужно перемножить полученные два числа вариантов N_8 и N_9, то есть искомое число вариантов равно произведению

$$M = N_8 \cdot N_9 = 81 \cdot 149 = 12069.$$

Заметим, что нами получена рекуррентная формула $N_{k+3} = N_k + N_{k+1} + N_{k+2}$, которая справедлива для любого натурального k.

Решение 2: Заметим, на каждом из двух пролетов лестницы десятиклассник Вася спускается отдельно от другого пролета, поэтому можно найти число способов спуститься для каждого пролета в отдельности и перемножить полученные два числа вариантов.

Решим задачу для пролета, состоящего из 8 ступенек. Будем нумеровать ступеньки цифрами от 0 до 8, где цифра 0 означает самую верхнюю ступеньку, цифра 8 — самую нижнюю ступеньку, а один шаг будем обозначать в виде $a - b$, где a и b — номера ступенек, на которых находился Вася за время этого шага. Также будем писать число ступенек, которые преодолел Вася за время шага.

Вася может перепрыгнуть через две ступеньки на третью ступеньку не более двух раз. Он может перепрыгнуть через две ступеньки два раза несколькими способами.

Если оставшиеся две ступеньки он преодолевает одним шагом, то имеется всего три варианта:

Шаги	0-3-6-8	0-3-5-8	0-2-5-8
Число ступенек	3, 3, 2	3, 2, 3	2, 3, 3

Если же оставшиеся две ступеньки он преодолевает двумя шагами, то имеется всего шесть вариантов:

Шаги	0-3-6-7-8	0-3-4-5-8	0-1-2-5-8
Число ступенек	3, 3, 1, 1	3, 1, 1, 3	1, 1, 3, 3
Шаги	0-3-4-7-8	0-1-4-5-8	0-1-4-7-8
Число ступенек	3, 1, 3, 1	1, 3, 1, 3	1, 3, 1, 3

Таким образом, получаем $n_2 = 9$ вариантов.

Вася перепрыгнуть через две ступеньки один раз несколькими способами, для каждого варианта запишем для краткости только число ступенек.

Число	3, 1, 1, 1, 1, 1	3, 1, 1, 1, 2	3, 1, 1, 2, 1	3, 1, 2, 1, 1	3, 2, 1, 1, 1
ступенек	3, 1, 2, 2	3, 2, 1, 2	3, 2, 2, 1		
	1, 3, 1, 1, 1, 1	1, 3, 1, 1, 2	1, 3, 1, 2, 1	1, 3, 2, 1, 1	1, 3, 2, 2
	1, 1, 3, 1, 1, 1	1, 1, 3, 1, 2	1, 1, 3, 2, 1		
	2, 3, 1, 1, 1	2, 3, 1, 2	2, 3, 2, 1		

Полученное число вариантов нужно умножить на 2 из-за симметрии относительно середины лестничного пролета. Таким образом, получаем $n_1 = 2 \cdot 19 = 38$ вариантов.

Наконец, Вася может ни одного раза не перепрыгнуть через две ступеньки. В этом случае он может несколько раз перепрыгнуть через одну ступеньку.

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку четыре раза, то такой вариант один: 0-2-4-6-8.

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку три раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить две единицы рядом с тремя двойками.

При этом есть четыре варианта расставить единицы рядом.

Число ступенек	2, 2, 2, 1, 1	2, 2, 1, 1, 2	2, 1, 1, 2, 2	1, 1, 2, 2, 2

А также есть $C_4^2 = 6$ — шесть вариантов расставить единички не рядом.

Число ступенек	2, 2, 1, 2, 1	2, 1, 2, 2, 1	1, 2, 2, 2, 1	2, 1, 2, 1, 2
	1, 2, 2, 1, 2	1, 2, 1, 2, 2		

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку два раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить две двойки рядом с четырьмя единицами.

При этом есть пять вариантов расставить двойки рядом.

Число ступенек	2, 2, 1, 1, 1, 1	1, 2, 2, 1, 1, 1	1, 1, 2, 2, 1, 1	1, 1, 1, 2, 2, 1
	1, 1, 1, 1, 2, 2			

А также есть $C_5^2 = 10$ — десять вариантов расставить двойки не рядом.

Число ступенек	2, 1, 2, 1, 1, 1	2, 1, 1, 2, 1, 1	2, 1, 1, 1, 2, 1	2, 1, 1, 1, 1, 2
	1, 2, 1, 2, 1, 1	1, 2, 1, 1, 2, 1	1, 2, 1, 1, 1, 2	1, 1, 2, 1, 2, 1
	1, 1, 2, 1, 1, 2	1, 1, 1, 2, 1, 2		

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку один раз, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить одну двойку рядом с шестью единицами, то есть имеется семь вариантов.

Число ступенек	2, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1, 2, 1, 1, 1, 1, 1	1, 1, 2, 1, 1, 1, 1	1, 1, 1, 2, 1, 1, 1
	1, 1, 1, 1, 2, 1, 1	1, 1, 1, 1, 1, 2, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 2	

Наконец, если Вася вообще не перепрыгивал через ступеньки, тогда имеется только один вариант: 0-1-2-3-4-5-6-7-8 с числом ступенек 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Поэтому если Вася не перепрыгивал через две ступеньки ни одного раза, то число вариантов равно $n_0 = 1 + 4 + 6 + 5 + 10 + 7 + 1 = 34$.

Таким образом, искомое число вариантов для пролета из 8 ступенек равно

$$N_8 = n_2 + n_1 + n_0 = 9 + 38 + 34 = 81.$$

Теперь решим задачу для пролета, состоящего из 9 ступенек. Будем нумеровать ступеньки цифрами от 0 до 9, где цифра 0 означает самую верхнюю ступеньку, цифра 9 — самую нижнюю ступеньку/

Вася может перепрыгнуть через две ступеньки на третью ступеньку не более трех раз.

Если Вася перепрыгнул через две ступеньки на третью ступеньку три раза, то имеется только один вариант: 0-3-6-9. Поэтому получаем $m_3 = 1$ вариант.

Вася может перепрыгнуть через две ступеньки два раза несколькими способами. Оставшиеся три ступеньки он может преодолеть по разному.

Если он один раз перепрыгивает через одну ступеньку, то имеется двенадцать вариантов:

Шаги	0-3-6-8-9	0-3-5-8-9	0-2-5-8-9
Число ступенек	3, 3, 2, 1	3, 2, 3, 1	2, 3, 3, 1
Шаги	0-3-6-7-9	0-3-5-6-9	0-2-5-6-9
Число ступенек	3, 3, 1, 2	3, 2, 1, 3	2, 3, 1, 3
Шаги	0-3-4-7-9	0-3-4-6-9	0-2-3-6-9
Число ступенек	3, 1, 3, 2	3, 1, 2, 3	2, 1, 3, 3
Шаги	0-1-4-7-9	0-1-4-6-9	0-1-3-6-9
Число ступенек	1, 3, 3, 2	1, 3, 2, 3	1, 2, 3, 3

Если же оставшиеся три ступеньки он преодолевает тремя шагами, то имеется всего десять вариантов:

Шаги	0-3-6-7-8-9	0-3-4-5-6-9	0-1-2-3-6-9
Число ступенек	3, 3, 1, 1, 1	3, 1, 1, 1, 3	1, 1, 1, 3, 3
Шаги	0-3-4-7-8-9	0-1-4-7-8-9	0-3-4-5-8-9
Число ступенек	3, 1, 3, 1, 1	1, 3, 3, 1, 1	3, 1, 1, 3, 1
Шаги	0-1-4-5-6-9	0-1-2-5-8-9	0-1-2-5-6-9
Число ступенек	1, 3, 1, 1, 3	1, 1, 3, 3, 1	1, 1, 3, 1, 3
Шаги	0-1-4-5-8-9		
Число ступенек	1, 3, 1, 3, 1		

Таким образом, получаем $m_2 = 12 + 10 = 22$ варианта.

Вася может перепрыгнуть через две ступеньки один раз несколькими способами. Оставшиеся шесть ступенек он может преодолеть по разному.

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку три раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить три двойки рядом с одной тройкой, то есть имеется четыре варианта. Для каждого варианта запишем для краткости только число ступенек.

Число ступенек	2, 2, 2, 3	2, 2, 3, 2	2, 3, 2, 2	3, 2, 2, 2

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку два раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить две двойки и две единицы рядом с одной тройкой, то есть имеется тридцать таких вариантов.

Число	2, 2, 3, 1, 1	2, 2, 1, 1, 3	2, 1, 1, 2, 3	1, 1, 2, 2, 3	
ступенек	2, 2, 1, 3, 1	2, 1, 2, 3, 1	1, 2, 2, 3, 1	2, 1, 2, 1, 3	1, 2, 2, 1, 3
	1, 2, 1, 2, 3				
	2, 3, 2, 1, 1	2, 3, 1, 1, 2	2, 1, 1, 3, 2	1, 1, 2, 3, 2	
	2, 3, 1, 2, 1	2, 1, 3, 2, 1	1, 2, 3, 2, 1	2, 1, 3, 1, 2	1, 2, 3, 1, 2
	1, 2, 1, 3, 2				
	3, 2, 2, 1, 1	3, 2, 1, 1, 2	3, 1, 1, 2, 2	1, 1, 3, 2, 2	
	3, 2, 1, 2, 1	3, 1, 2, 2, 1	1, 3, 2, 2, 1	3, 1, 2, 1, 2	1, 3, 2, 1, 2
	1, 3, 1, 2, 2				

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку один раз, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить четыре единицы рядом с одной двойкой и одной тройкой, то есть имеется тридцать таких вариантов.

Число	2, 3, 1, 1, 1, 1	2, 1, 1, 1, 1, 3	1, 1, 1, 1, 2, 3		
ступенек	2, 1, 3, 1, 1, 1	1, 2, 3, 1, 1, 1	2, 1, 1, 1, 3, 1	1, 2, 1, 1, 1, 3	1, 1, 1, 2, 3, 1
	1, 1, 1, 2, 1, 3				
	2, 1, 1, 3, 1, 1	1, 1, 2, 3, 1, 1	1, 1, 2, 1, 1, 3		
	1, 2, 1, 3, 1, 1	1, 2, 1, 1, 3, 1	1, 1, 2, 1, 3, 1		
	3, 1, 2, 1, 1, 1	1, 3, 2, 1, 1, 1	3, 1, 1, 1, 2, 1	1, 3, 1, 1, 1, 2	1, 1, 1, 3, 2, 1
	1, 1, 1, 3, 1, 2				
	3, 1, 1, 2, 1, 1	1, 1, 3, 2, 1, 1	1, 1, 3, 1, 1, 2		
	1, 3, 1, 2, 1, 1	1, 3, 1, 1, 2, 1	1, 1, 3, 1, 2, 1		

Если же Вася ни разу не перепрыгнул через одну ступеньку, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить шесть единиц рядом с одной тройкой, то есть имеется семь таких вариантов.

Число ступенек	3, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1, 3, 1, 1, 1, 1, 1	1, 1, 3, 1, 1, 1, 1	1, 1, 1, 3, 1, 1, 1
	1, 1, 1, 1, 3, 1, 1	1, 1, 1, 1, 1, 3, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 3	

Таким образом, получаем $m_1 = 4 + 30 + 30 + 7 = 71$ вариант.

Наконец, Вася может ни одного раза не перепрыгнуть через две ступеньки. В этом случае он может несколько раз перепрыгнуть через одну ступеньку.

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку четыре раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить одну единицу рядом с четырьмя двойками, то есть имеется пять вариантов.

Число ступенек	2, 2, 2, 2, 1	2, 2, 2, 1, 2	2, 2, 1, 2, 2	2, 1, 2, 2, 2
	1, 2, 2, 2, 2			

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку три раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить три единицы рядом с тремя двойками.

При этом есть четыре варианта расставить единицы рядом.

Число ступенек	2, 2, 2, 1, 1, 1	2, 2, 1, 1, 1, 2	2, 1, 1, 1, 2, 2	1, 1, 1, 2, 2, 2

И есть $4 \cdot 3 = 12$ — двенадцать вариантов расставить только две единицы рядом.

Число ступенек	2, 2, 1, 2, 1, 1	2, 1, 2, 2, 1, 1	1, 2, 2, 2, 1, 1	
	2, 2, 1, 1, 2, 1	2, 1, 2, 1, 1, 2	1, 2, 2, 1, 1, 2	
	2, 1, 1, 2, 2, 1	2, 1, 1, 2, 1, 2	1, 2, 1, 1, 2, 2	
	1, 1, 2, 2, 2, 1	1, 1, 2, 2, 1, 2	1, 1, 2, 1, 2, 2	

А также есть $C_4^3 = 4$ — четыре варианта расставить единички не рядом.

Число ступенек	2, 1, 2, 1, 2, 1	1, 2, 2, 1, 2, 1	1, 2, 1, 2, 2, 1	1, 2, 1, 2, 1, 2

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку два раза, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить две двойки рядом с пятью единицами.

При этом есть шесть вариантов расставить двойки рядом.

Число ступенек	2, 2, 1, 1, 1, 1, 1	1, 2, 2, 1, 1, 1, 1	1, 1, 2, 2, 1, 1, 1	1, 1, 1, 2, 2, 1, 1
	1, 1, 1, 1, 2, 2, 1	1, 1, 1, 1, 1, 2, 2		

А также есть $C_6^2 = 15$ — пятнадцать вариантов расставить двойки не рядом.

Число ступенек	2, 1, 2, 1, 1, 1, 1	2, 1, 1, 2, 1, 1, 1	2, 1, 1, 1, 2, 1, 1	2, 1, 1, 1, 1, 2, 1
	2, 1, 1, 1, 1, 1, 2	1, 2, 1, 2, 1, 1, 1	1, 2, 1, 1, 2, 1, 1	1, 2, 1, 1, 1, 2, 1
	1, 2, 1, 1, 1, 1, 2	1, 1, 2, 1, 2, 1, 1	1, 1, 2, 1, 1, 2, 1	1, 1, 2, 1, 1, 1, 2
	1, 1, 1, 2, 1, 2, 1	1, 1, 1, 2, 1, 1, 2	1, 1, 1, 1, 2, 1, 2	

Если Вася перепрыгнул через одну ступеньку один раз, то таких вариантов несколько. Это число равно числу вариантов расставить одну двойку рядом с семью единицами, то есть имеется восемь вариантов.

Число	2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1	1, 1, 2, 1, 1, 1, 1, 1	1, 1, 1, 2, 1, 1, 1, 1
ступенек	1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1	1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2

Наконец, если Вася вообще не перепрыгивал через ступеньки, тогда имеется только один вариант: 0-1-2-3-4-5-6-7-8-9 с числом ступенек 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

Поэтому если Вася не перепрыгивал через две ступеньки ни одного раза, то число вариантов равно $n_0 = 5 + 4 + 12 + 4 + 6 + 15 + 8 + 1 = 55$.

Таким образом, искомое число вариантов для пролета из 9 ступенек равно

$$N_9 = m_3 + m_2 + m_1 + m_0 = 1 + 22 + 71 + 55 = 149.$$

Наконец, искомое число вариантов равно произведению

$$M = N_8 \cdot N_9 = 81 \cdot 149 = 12069.$$

Ответ: $M = 12069$.

Задача №4. Дана арифметическая прогрессия $a_1 = 25, a_2, a_3, \ldots, a_{2022} = 2025$. Вычислите

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{2021}}+\sqrt{a_{2022}}}.$$

Решение: Найдем разность прогрессии $d = \dfrac{2025-25}{2022-1} = \dfrac{2000}{2021}$.

Домножив числитель и знаменатель на сопряженное выражение, получим

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{2021}}+\sqrt{a_{2022}}} =$$
$$= \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{d} + \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{d} + \cdots + \frac{\sqrt{a_{2021}}-\sqrt{a_{2022}}}{d} =$$
$$= \frac{\sqrt{a_{2022}}-\sqrt{a_1}}{d} = \frac{(45-5)2021}{2000} = \frac{2021}{50} = 40{,}42.$$

Ответ: 40,42

Задача №5. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+4x-2} - \sqrt{x^2+6} = \sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{3x-1}.$$

Решение: Обозначим функции

$$F(x,y) = \sqrt{x^2+2y} + \sqrt[3]{x+y}, \quad g(x) = 3, \quad h(x) = 2x-1,$$

тогда

$$F(x,g(x)) = \sqrt{x^2+6} + \sqrt[3]{x+3}, \quad F(x,h(x)) = \sqrt{x^2+4x-2} + \sqrt[3]{3x-1}.$$

Поэтому исходное уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{x^2+4x-2} - \sqrt{x^2+6} = \sqrt[3]{x+3} - \sqrt[3]{3x-1}, \Leftrightarrow F(x,g(x)) = F(x,h(x)).$$

Пусть x_0 — корень исходного уравнения, тогда x_0 также является корнем уравнения

$$F(x_0,g(x)) = F(x_0,h(x)).$$

Но так как функция $f(y) = F(x_0,y) = \sqrt{x_0^2+2y} + \sqrt[3]{x_0+y}$ является строго возрастающей по переменной y при всех $y \geq -\dfrac{x_0^2}{2}$, тогда полученное уравнение равносильно уравнению

$$F(x_0,g(x)) = F(x_0,h(x)), \Leftrightarrow g(x) = h(x), \Leftrightarrow 2x-1 = 3, \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Нетрудно проверить, что $x_0 = 2$ попадает в область допустимых значений и является корнем исходного уравнения:

$$\sqrt{2^2+4\cdot 2-2} - \sqrt{2^2+6} = \sqrt{10} - \sqrt{10} = 0 = \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2+3} - \sqrt[3]{3\cdot 2-1}.$$

Ответ: 2.

Задача №6. Докажите, что для $a < 1$, $b < 1$, $c < 1$, $a + b + c \geq \frac{1}{2}$ выполняется неравенство $(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq \dfrac{125}{216}$.

Решение: Так как $a < 1, b < 1, c < 1$,то $1 - a > 0, 1 - b > 0, 1 - c > 0$. Используя известное неравенство о средних, получим

$$\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \frac{(1-a)+(1-b)+(1-c)}{3} = 1 - \frac{a+b+c}{3} \leq \frac{5}{6}$$

при условии, что $a + b + c \geq \dfrac{1}{2}$.

Следовательно, получили $\sqrt[3]{(1-a)(1-b)(1-c)} \leq \dfrac{5}{6}$.

Возведем в куб последнее неравенство и получим требуемое неравенство.

Таким образом, неравенство доказано.

Задача №7. Пусть задано множество остатков от деления на 11, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Пусть над этим множеством задана степенная функция четвертой степени (т.е. все значения переменных и коэффициенты принадлежат только множеству A) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 6x + 10$. Найдите элемент множества A, являющийся суммой корней уравнения $f(x) = 0$.

Решение: $f(0) \mod 11 = 10 \neq 0$, $f(1) \mod 11 = 5 \neq 0$, $f(2) \mod 11 = 2 \neq 0$, $f(3) \mod 11 = 0$, $f(4) \mod 11 = 0$, $f(5) \mod 11 \neq 0$, $f(6) \mod 11 \neq 0$, $f(7) \mod 11 \neq 0$, $f(8) \mod 11 = 0$, $f(9) \mod 11 \neq 0$, $f(10) \mod 11 \neq 0$.

Итак, $f(3) \mod 11 = 0$, $f(4) \mod 11 = 0$, $f(8) \mod 11 = 0$.

Так как многочлен степени 4, то какой-то корень кратный. Убеждаемся, что

$$(x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 6x + 10) \mod 11 = (x-3)(x-4)^2(x-8) \mod 11.$$

Ответ: $3 + 4 + 4 + 8 = 8$.

Задача №8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{yz}}{y+z}, \\ y = \frac{\sqrt{xz}}{x+z}, \\ z = \frac{\sqrt{yx}}{y+x}. \end{cases}$

Решение: Отметим, что числа x, y, z одного знака, при этом если тройка $(x; y; z)$ — решение системы, то $(-x; -y; -z)$ также решение.

Пусть числа x, y, z положительны. Из неравенства о средних $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ следует, что $\dfrac{\sqrt{ab}}{a+b} \leq \dfrac{1}{2}$. Следовательно, каждое из чисел числа x, y, z не больше $\dfrac{1}{2}$.

Перемножив все уравнения системы, получим

$$(x + y)(y + z)(z + x) = 1.$$

Но сумма любых двух из чисел x, y, z не превосходит 1. Следовательно, $x+y = y+z = z + x = 1$. Значит $x = y = z = \dfrac{1}{2}$. Так как $(-x; -y; -z)$ также будет решением, то $x = y = z = -\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Задача №9. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = x^8 - 8\sqrt{3}x^6 + 66x^4 - 72\sqrt{3}x^2 + 100.$$

Решение: Сделаем замену переменной по формуле $x^2 = \sqrt{3}a$, тогда функция $f(x)$ примет вид

$$f(x) = 9a^4 - 8\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{3}a^3 + 66\cdot 3a^2 - 72\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}a + 100 =$$
$$= 9(a^4 - 8a^3 + 22a^2 - 24a + 11) + 1 = 9g(a) + 1,$$

где

$$g(a) = a^4 - 8a^3 + 22a^2 - 24a + 11,$$

где $a \geq 0$. Найдем производную функции

$$g'(a) = 4a^3 - 24a^2 + 44a - 24,$$

и решим уравнение

$$g'(a) = 0, \Rightarrow 4a^3 - 24a^2 + 44a - 24 = 0.$$

Нетрудно видеть, что уравнение имеет корень $a = 1$, поскольку сумма его коэффициентов равна $4 - 24 + 44 - 24 = 48 - 48 = 0$. Поделим многочлен $4a^3 - 24a^2 + 44a - 24$ на двучлен $a - 1$ по схеме Горнера, получим

	a^3	a^2	a^1	a^0
	4	-24	44	-24
$a = 1$	4	-20	24	0
	a^2	a^1	a^0	

поэтому полученное уравнение примет вид

$$(a-1)(4a^2 - 20a + 24) = 0, \Rightarrow 4(a-1)(a^2 - 5a + 6) = 0, \Rightarrow$$
$$4(a-1)(a-2)(a-3) = 0,$$

то есть уравнение имеет корни $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $a_3 = 3$.

Так как $g'(a) < 0$ при $0 \leq a < 1$ и при $2 < a < 3$, то на этих интервалах функция $g(a)$ убывает. Так как $g'(a) > 0$ при $1 < a < 2$ и при $a > 3$, то на этих интервалах функция $g(a)$ возрастает.

Следовательно, функция $g(a)$ принимает наименьшее значение в одной из двух точек $a_1 = 1$ или $a_3 = 3$:

$$g(a_1) = g(1) = 1^4 - 8\cdot 1^3 + 22\cdot 1^2 - 24\cdot 1 + 11 = 2;$$
$$g(a_3) = g(3) = 3^4 - 8\cdot 3^3 + 22\cdot 3^2 - 24\cdot 3 + 11 =$$
$$= 81 - 8\cdot 27 + 22\cdot 9 - 24\cdot 3 + 11 = 81 - 216 + 198 - 72 + 11 = 2.$$

Поскольку значения $g(1) = g(3) = 2$ равны, тогда $\min\limits_{a\geq 0} g(a) = 2$, и поэтому минимальное значение функции $f(x)$ равно

$$\min_x f(x) = \min_{x\geq 0} f(x) = 9\cdot\min_{a\geq 0} g(a) + 1 = 9\cdot 2 + 1 = 19.$$

Ответ: 19.

Задача №10. Три окружности с радиусами $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ попарно касаются друг друга внешним образом, а также касаются внешним образом четвертой окружности с радиусом r. Найти r.

Решение: Пусть A, B, C — центры «внешних» окружностей, D — центр «внутренней» окружности. По теореме косинусов для треугольника $\triangle BDC$ получаем

$$(b+c)^2 = (b+r)^2 + (c+r)^2 - 2(b+r)(c+r)\cos\angle BDC,$$
$$2bc = 2br + 2cr + r^2 - 2(b+r)(c+r)\cos\angle BDC, \quad \cos\angle BDC = \frac{br+cr+r^2-bc}{(b+r)(c+r)},$$

тогда получим

$$\cos^2\frac{\angle BDC}{2} = \frac{1+\cos\angle BDC}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{br+cr+r^2-bc}{(b+r)(c+r)}\right) = \frac{r(b+c+r)}{(b+r)(c+r)},$$
$$\sin^2\frac{\angle BDC}{2} = \frac{1-\cos\angle BDC}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{br+cr+r^2-bc}{(b+r)(c+r)}\right) = \frac{bc}{(b+r)(c+r)}.$$

Если $\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$, где α, β, γ — углы треугольника со сторонами x, y, z и радиусом описанной окружности R, то по теореме синусов и по теореме косинусов получим

$$\frac{x}{\sin\alpha} = \frac{y}{\sin\beta} = \frac{z}{\sin\gamma} = 2R, \quad x^2 = y^2+z^2-2yz\cos\alpha,$$
$$x = 2R\sin\alpha, \quad y = 2R\sin\beta, \quad z = 2R\sin\gamma,$$
$$4R^2\sin^2\alpha = 4R^2\sin^2\beta + 4R^2\sin^2\gamma - 2\cdot 2R\sin\beta\cdot 2R\sin\gamma\cdot\cos\alpha,$$
$$\sin^2\alpha = \sin^2\beta+\sin^2\gamma - 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha,$$
$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \sin^2\gamma + 2\sin\beta\sin\gamma\cos\alpha = 0.$$

Подставив в эту формулу значения $\alpha = \dfrac{\angle BDC}{2}$, $\beta = \dfrac{\angle ADC}{2}$, $\gamma = \dfrac{\angle ADB}{2}$, получим

$$\frac{bc}{(b+r)(c+r)} - \frac{ac}{(a+r)(c+r)} - \frac{ab}{(a+r)(b+r)} + 2\frac{a\sqrt{bcr(b+c+r)}}{(a+r)(b+r)(c+r)} = 0,$$

то есть

$$\frac{a+r}{a}-\frac{b+r}{b}-\frac{c+r}{c}+2\sqrt{\frac{r(b+c+r)}{bc}}=0,$$

$$\frac{r}{a}-\frac{r}{b}-\frac{r}{c}-1+2\sqrt{\frac{r(b+c+r)}{bc}}=0,$$

$$2\sqrt{\frac{r(b+c+r)}{bc}}=1+\frac{r}{b}+\frac{r}{c}-\frac{r}{a},$$

$$4r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4r^2\frac{1}{bc}=1+2r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+r^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2,$$

$$4r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+4r^2\frac{1}{bc}=1+2r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)+r^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2-2r^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{a}+r^2\frac{1}{a^2},$$

$$4r^2\frac{1}{bc}=1-2r\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+r^2\frac{1}{b^2}+2r^2\frac{1}{bc}+r^2\frac{1}{c^2}-2r^2\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\frac{1}{a}+r^2\frac{1}{a^2},$$

$$r^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2}{ab}-\frac{2}{ac}-\frac{2}{bc}\right)-2r\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+1=0.$$

Подставив в это уравнение значения $a=1$, $b=2$, $c=3$, получим

$$r^2\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-1-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)-2r\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+1=0,$$

$$-r^2\frac{23}{36}-r\frac{11}{3}+1=0,\quad 23r^2+132r-36=0,$$

решая которое, находим искомое значение радиуса r:

$$r_{1,2}=\frac{-66\pm\sqrt{66^2-23\cdot(-36)}}{23}=\frac{-66\pm 6\sqrt{11^2+23}}{23}=\frac{-66\pm 72}{23},$$

$r_1=\dfrac{-66-72}{23}=-6<0$ — посторонний корень, и $r_2=\dfrac{-66+72}{23}=\dfrac{6}{23}$ — искомое значение.

Ответ: $r=\dfrac{6}{23}$.